

**Актуальные направления развития прикладной
математики в энергетике, энергоэффективности
и информационно-коммуникационных технологиях**

*Сборник трудов международной
научной конференции, посвященной
180-летию МГТУ имени Н.Э. Баумана.
2010 год, город Москва*

УДК 5+372.8
ББК 74.262
С 56

Оргкомитет конференции:

Николай Иванович Сидняев (председатель),
Юрий Иванович Димитриенко (зам. председателя), Хрусталеv Лев Николаевич,
Андрей Владленович Гласко, Анатолий Александрович Федотов,
Павел Васильевич Храпов, Раис Сальманович Исмагилов,
Владимир Николаевич Белов, Игорь Валерианович Павлов,
Владимир Иванович Тимонин, Александр Сергеевич Савин,
Николай Семенович Васильев, Сергей Константинович Соболев,
Эдуард Римович Смольяков, Николай Алексеевич Северцев,
Гулам Садыхович Садыхов, Владимир Петрович Савченко,
Владимир Георгиевич Богомолов, Георгий Александрович Кокотушкин,
Виктор Яковлевич Томашпольский.

С 56 **Актуальные** направления развития прикладной математики
в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных
технологиях. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2010.
ISBN 5-94010-368-5

Представлены доклады участников конференции, посвящённой 180-летию МГТУ имени Н.Э. Баумана по темам: “Фундаментальные проблемы вероятностного прогнозирования и оценки криолитозоны при изменении климата”, “Вероятностно-статистические модели, методы расчета надежности и прочности сложных технических систем”, “Математическое моделирование сложных прикладных наукоемких задач”, “Функциональный анализ и дифференциальные уравнения в практических приложениях”, “Методы вычислительной и прикладной математики и их применение к фундаментальным исследованиям в различных областях энергетики и информационно-коммуникационных технологий”, “Внедрение современных физических и математических методов в учебный процесс”.

Для преподавателей высших учебных заведений. Может представлять интерес для аспирантов, студентов и специалистов в соответствующих областях

знаний.
ББК 74.262

ISBN 5-94010-368-5

© Коллектив авторов, указанных на
обороте титульного листа, 2010
© МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2010

СЕКЦИЯ №1

Фундаментальные проблемы вероятностного прогнозирования и оценки криолитозоны при изменении климата

ДИНАМИКА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ВЕЧНОМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЯ ЗДАНИЯ НА СВАЙНОМ ФУНДАМЕНТЕ

А.В. Гласко, А.А. Федотов, П.В. Храпов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Одна из основных проблем строительства в криолитозоне состоит в том, что таяние вечномерзлого грунта, в результате теплового воздействия со стороны установленного на нем отапливаемого здания, ведет к проявлению опасных криогенных процессов и, в конечном счете, к аварийной ситуации. Поэтому температура грунта под зданием является основным фактором, определяющим его прочность и устойчивость. В настоящей работе моделировалась динамика температурного поля грунтов основания здания в криолитозоне. При этом рассматривалось здание, установленное на свайном фундаменте с проветриваемым подпольем сначала без использования, а затем с использованием термостабилизаторов (сезонно-действующих охлаждающих устройств).

1. Здание со свайным фундаментом и проветриваемым подпольем.

Рассматривается здание, установленное на свайном фундаменте с проветриваемым подпольем. Используются сваи из тяжелого (обычного) бетона диаметром 159 мм и глубиной погружения в грунт 8 м. Высота проветриваемого подполья составляет 1.2 м. На рис. 1 представлено здание в горизонтальной проекции (прямоугольник, разделенный на «клетки»). Ось Oz направлена в глубину грунта. Моделируется динамика температуры в ограниченной расчетной области – прямоугольном параллелепипеде $D = \{0 \leq x \leq xL, 0 \leq y \leq yL, 0 \leq z \leq zL\}$ под зданием (при этом предполагается симметрия распределения температуры относительно осей x и y). Моделирование осуществляется на основе уравнения теплопроводности

$$(c\rho + Q\delta(u - u^*)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) + s(x, y, z, t)$$

с начальным условием $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$. Здесь c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, u^* – температура фазового перехода, Q – теплота фазового перехода, $s(x, y, z, t)$ – мощность внутренних источников тепла, $\delta(u - u^*)$ – дельта-функция. На границе $z = 0$ с температурой $u = u_b$ происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $\theta(t)$. Плотность теплового потока на этой границе $J_b = h \cdot (\theta(t) - u_b)$, где h – коэффициент теплоотдачи. На границе $z = zL$ поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей

среды $\theta_0 = \text{const}$. Боковые границы области D теплоизолированы: $u_x(0, y, z, t) = 0$, $u_x(xL, y, z, t) = 0$, $u_y(x, 0, z, t) = 0$, $u_y(x, yL, z, t) = 0$.

Сваи и подполье учитываются подобно литологическим слоям, а именно как части расчетной области, путем задания значений λ, ρ, c , отвечающих материалу сваи (бетону), или воздуху, заполняющему подполье, а также значений $Q=0$, $s=0$ (фазовые переходы и источники тепла в сваях и воздухе подполья отсутствуют). Плотность тяжелого бетона составляет $\rho = 2300 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость – $c = 0.2 \text{ ккал/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, коэффициент теплопроводности – $\lambda = 1.5 \text{ ккал/(м} \cdot \text{ч} \cdot ^\circ\text{C)}$. Сваи расположены по сетке рис. 1 (пустые кружочки). Вдоль оси x сваи расположены с интервалом 3-4 м (всего шесть свай в длину здания), вдоль оси y – с интервалом 1-3 м (всего 4 сваи в ширину здания). Сваи расположенные на расстоянии 1 м (по обе стороны от оси x) скреплены ростверками. Плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности воздуха, наполняющего проветриваемое подполье равны, соответственно: $\rho = 1.293 \text{ кг/м}^3$, $c = 0.240195 \text{ ккал/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, $\lambda = 0.02873736 \text{ ккал/(м} \cdot \text{ч} \cdot ^\circ\text{C)}$.

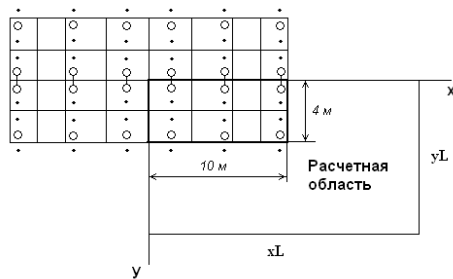


Рис. 1. Схема размещения свай и термостабилизаторов.

На рис. 2 представлено расчетное распределение температуры грунта вдоль оси x на глубине $z=1 \text{ м}$ при $y=1 \text{ м}$ через 5 лет после начала эксплуатации здания. Локальные максимумы («пики») температуры на рисунке соответствуют тепловому влиянию двух свай с $x=1.5 \text{ м}$ и $x=5.5 \text{ м}$. Наличие этих максимумов обусловлено тем, что через бетонные сваи тепло от здания в грунт передается гораздо лучше, чем через воздух подполья. Теплота от свай распространяется в окружающий их грунт. «Излом» графика при x несколько меньшем 10 м обусловлен третьей сваей с $x=9.5 \text{ м}$. Поскольку эта свая расположена вблизи правой границы здания, ее влияние на грунт в существенной степени компенсируется влиянием холодного воздуха и не порождает локального максимума температуры на графике, но препятствует ее падению с ростом x .

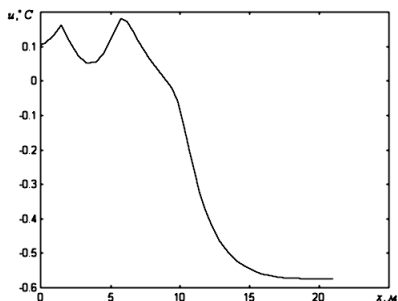


Рис. 2. Распределение температуры грунта вдоль оси x на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через 5 лет после начала эксплуатации здания без использования термостабилизаторов.

Видно, что не смотря на наличие проветриваемого подполья, существенно снижающего тепловое влияние здания на грунт (при установке здания непосредственно на грунт соответствующее значение температуры достигает более чем 8°C), через 5 лет грунт под зданием на рассматриваемой глубине все-равно будет в основном талым.

2. Замораживание грунтов основания с помощью вертикальных термостабилизаторов.

Для сохранения грунта в мерзлом состоянии используются вертикальные термостабилизаторы СГВ-100-40/9. Глубина погружения термостабилизатора в грунт $z_0 = 8$ м. Мощность составляет $s_0 = -28.3932$ ккал/(м·ч). Динамика функционирования термостабилизатора следующая [1]. Термостабилизатор начинает работать с момента начала эксплуатации здания (1 января) и функционирует до 31 марта включительно. С 1 апреля по 30 сентября он не работает и снова «включается» 1 октября. В последующие годы термостабилизатор «отключается» 1 апреля и снова начинает функционировать 1 октября.

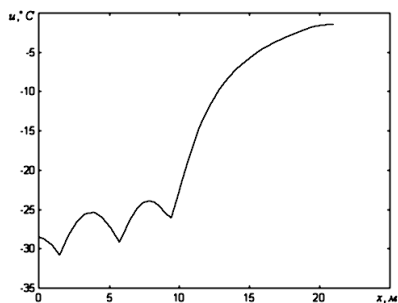


Рис. 3. Распределение температуры грунта вдоль оси x на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через 5 лет после начала эксплуатации здания при использовании термостабилизаторов.

Термостабилизаторы размещаются по сетке рис.1 (точки) на расстоянии 1 м по обе стороны от свай параллельно оси у. «Центральные» сваи, расположенные по обе стороны от оси х и скрепленные ростверками, не разделены термостабилизаторами. Последние расположены на расстоянии 1 м по обе стороны от такой пары свай. Всего в расчетной области размещено 9 термостабилизаторов.

Термостабилизатор рассматривается как бесконечно тонкий стержень, являющийся источником тепла (с отрицательной мощностью) внутри расчетной области:

$$s(x, y, z, t) = s_0(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot I_{[0, z_0]}(z), \quad (1)$$

где $\delta(\xi)$ – δ -функция, (x_0, y_0) – координаты размещения термостабилизатора в плане, $I_{[0, z_0]}(z)$ – индикатор сегмента $[0, z_0]$, периодическая функция $s_0(t)$ отлична от нуля только с 1 октября по 31 марта когда $s_0(t) = s_0$. Для решения уравнения теплопроводности используется метод контрольного объема [2]. При вычислении среднего значения функции (1) по контрольному объему (КО) δ -функции «исчезают»:

$$\bar{s} = \frac{1}{\Delta V} \iiint s(x, y, z, t) dV = \frac{s_0(t)}{\Delta V} \int_{z_{w,k-1}}^{z_{w,k}} I_{[0, z_0]}(z) dz = \begin{cases} s_0(t) h_{z,k} / \Delta V, & z_{w,k} \leq z_0 \\ s_0(t) \Delta z_0 / \Delta V, & z_{w,k} > z_0 \end{cases},$$

где $z_{w,k-1}$ и $z_{w,k}$ – координаты граней рассматриваемого КО вдоль оси z , $h_{z,k} = z_{w,k} - z_{w,k-1}$, $\Delta z_0 = h_{z,k} - z_{w,k} + z_0$ – глубина, на которую погружен термостабилизатор в рассматриваемый КО (она может быть отлична от $h_{z,k}$ только для того КО, в который попадает нижний конец термостабилизатора).

На рис. 3 представлена расчетная зависимость $u(x)$ на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через 5 лет после начала эксплуатации здания (как и в предыдущем примере). Видно, что грунт под зданием мерзлый. Температура под зданием ниже $u=-20$ °С, а в отдельных местах ниже $u=-30$ °С. Замораживание может показаться избыточным, однако на рис. 4 представлено распределение температуры в летний период, а именно 1-го июля первого года эксплуатации здания при использовании термостабилизаторов. Видно, что температура под зданием ниже нуля, но выше -2 °С и избыточность замораживания отсутствует.

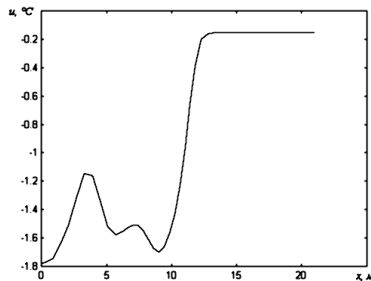


Рис. 4. Распределение температуры грунта вдоль оси x на глубине $z=1$ м при $y=1$ м 1-го июля первого года эксплуатации здания при использовании термостабилизаторов.

Список литературы

1. Попов А.П., Милованов В.И., Жмулин В.В., Рябов В.А., Бережной М.А. К вопросу о типовых технических решениях по основаниям и фундаментам для криолитозоны // Инженерная геология. – 2008. – № 3. – С. 22-39.
2. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. - М.: Издательство МЭИ, 2003. - 312 с.

ДИНАМИКА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЯ ЗДАНИЯ В УСЛОВИЯХ ЛИНЗОВОЙ МЕРЗЛОТЫ

А.В. Гласко, А.А. Федотов, П.В. Храпов
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В работе [1] рассмотрено здание, установленное на свайном фундаменте с проветриваемым подпольем в условиях сплошной мерзлоты. В настоящей работе рассматривается то же здание в условиях линзовой мерзлоты для двух случаев: а) здание установлено непосредственно на грунт; б) здание установлено на свайном фундаменте с проветриваемым подпольем, грунт охлаждается с помощью термостабилизаторов. Динамика температуры $u(x, y, z, t)$ грунтов основания здания моделируется на основе уравнения теплопроводности

$$(c\rho + Q\delta(u - u^*))\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\right) + s(x, y, z, t)$$

с граничными условиями $u_x(0, y, z, t) = 0$, $u_x(xL, y, z, t) = 0$, $u_y(x, 0, z, t) = 0$, $u_y(x, yL, z, t) = 0$, $u(x, y, zL, t) = \theta_0 = \text{const}$, $u_x(x, y, 0, t) = -\frac{h}{\lambda} \cdot (\theta(t) - u_b)$,

где x и y – координаты точки в горизонтальной плоскости, ось z направлена в глубь грунта, значения $x = xL$, $y = yL$, $z = zL$, так же как и нулевые значения координат, соответствуют границам расчетной области (параллелепипед), c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, u^* – температура фазового перехода, Q – теплота фазового перехода, $s(x, y, z, t)$ – мощность внутренних источников тепла, $\delta(u - u^*)$ – дельта-функция.

Тип мерзлоты задается путем выбора начального условия $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$, которое на практике определяется по результатам геологической разведки. В частности, по результатам геологических изысканий определяется форма, размеры и температура линзы мерзлого грунта. В настоящей работе рассматривается линза в форме эллиптического цилиндра с полуосями a и b вдоль осей x и y , соответственно, и высотой h . Известно [2],

что размеры линзы в плане могут достигать десятков метров, а ее мощность не превышать нескольких метров. Поэтому $h \ll a$, $h \ll b$. Моделируется хрестоматийная ситуация, когда за время строительства под зданием образовалась линза мерзлого грунта, которая начинает таять с началом эксплуатации здания [2]. Размеры линзы равны $a=10$ м, $b=4$ м, $h=2$ м. Верхняя граница линзы (эллипс) совпадает с поверхностью земли. Центр симметрии эллипса – с началом координат. Линза находится под зданием в начальный момент времени $t = 0$, соответствующий началу эксплуатации здания (1 января).

а) Здание расположено непосредственно на поверхности грунта (без проветриваемого подполья, фундамента и термостабилизаторов). Таким образом, линза занимает часть расчетной области, описываемую неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

Температура внутри линзы считается постоянной и равной $u = -10^\circ\text{C}$. Температура в грунте окружающем линзу – положительной и убывающей с ростом z ($1.6^\circ\text{C} \leq u \leq 2.9^\circ\text{C}$).

На рис. 1 представлено распределение температуры вдоль оси x на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через неделю после начала эксплуатации здания.

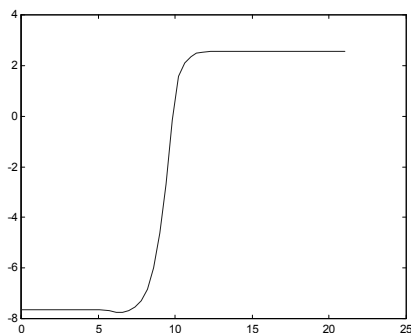


Рис. 1. Распределение температуры вдоль оси x на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через неделю после начала эксплуатации здания.

Рисунок отчетливо демонстрирует наличие линзовой мерзлоты. На рис. 2 представлена зависимость $u(x)$ при тех же значениях y и z через год после начала эксплуатации. Видно, что линза растаяла, температура $u(x) > 0^\circ\text{C}$ на всем рассматриваемом промежутке.

На рис.3 представлена зависимость $u(x)$ при тех же значениях y и z через 5 лет после начала эксплуатации здания. Видно, что температура под зданием немного повысилась.

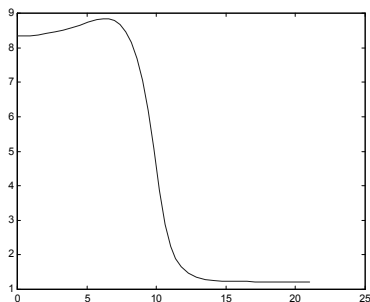


Рис. 2. Зависимость $u(x)$ на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через год после начала эксплуатации здания.

Сравнение с соответствующим распределением температуры в случае сплошной мерзлоты показывает, что температура под зданием на рис. 3 выше примерно на 2°C , несмотря на то, что в начальный момент времени температура линзы выбиралась существенно ниже, чем в соответствующих точках в случае сплошной мерзлоты. Это обусловлено тем, что сплошная мерзлота гораздо более устойчива к тепловому воздействию, чем отдельная линза мерзлого грунта, которая легко подвергается таянию в результате влияния здания. После таяния линзы температура грунта под зданием повышается, не испытывая препятствий со стороны окружающего мерзлого грунта, как в случае сплошной мерзлоты.

Очевидно, что без принятия искусственных мер по сохранению линзы мерзлого грунта, здание очень быстро окажется в аварийной ситуации.

б) Рассматривается то же здание, но на свайном фундаменте с проветриваемым подпольем и охлаждением грунта с помощью вертикальных гладкостенных термостабилизаторов (сезоннодействующих охлаждающих устройств) СГВ-100-40/9. Размещение свай, термостабилизаторов и их характеристики такие же как в работе [1]. Результаты моделирования для стандартных значений y и z , через пять лет после начала эксплуатации (в январе) приведены на рис. 4. Видно, что благодаря принятым мерам линза под зданием остается в мерзлом состоянии. Рис. 5, на котором представлено распределение $u(x)$ при тех же параметрах, но в июле первого года эксплуатации, демонстрирует, что замораживание грунтов (например, количество термостабилизаторов) не является избыточным.

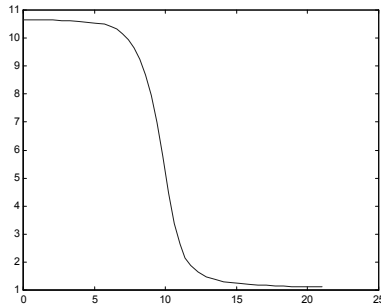


Рис. 3. Зависимость $u(x)$ на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через пять лет после начала эксплуатации здания.

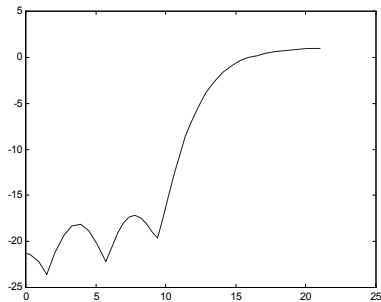


Рис. 4. Зависимость $u(x)$ на глубине $z=1$ м при $y=1$ м через пять лет после начала эксплуатации здания в случае наличия свайного фундамента, проветриваемого подполья и использования термостабилизаторов.

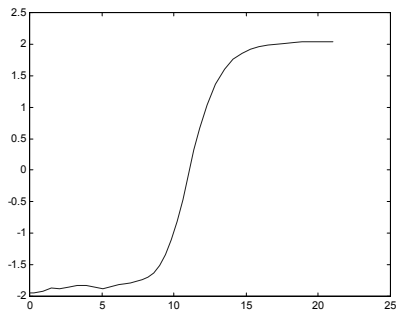


Рис. 5. Зависимость $u(x)$ на глубине $z=1$ м при $y=1$ м в июле 1-го года эксплуатации здания в случае наличия свайного фундамента, проветриваемого подполья и охлаждения грунтов основания с помощью вертикальных термостабилизаторов.

Список литературы

1. Гласко А.В. , Федотов А.А. , Храпов П.В. Динамика температурного поля вечномёрзлых грунтов основания здания на свайном фундаменте. // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях», Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 27 октября 2010 г.
2. Алексеев С.И. Основания и фундаменты. Часть 12 <http://www.buildcalc.ru/Learning/BasesAndFoundations/Open.aspx?id=Chapter12>

О ПОСТРОЕНИИ КРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПЛАВЛЕНИИ ПЛОСКОГО СЛОЯ МАТЕРИАЛА

Н.А. Россихин, И.Г. Зорина

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Во многих задачах теплообмена, связанных с плавлением, необходимо учитывать конвективное движение в области расплава. Расчет конвективной составляющей представляет сложную в теоретическом отношении задачу и осуществляется обычно численно или экспериментально. В твердой фазе теплообмен описывается проще и в ряде случаев может быть использована аналитическая или приближенная аналитической зависимость. В работе предлагается вывод зависимостей теплообмена в плоском слое материала для случая переохлажденной твердой фазы $T_0 < T_\phi$ на основе аналитической зависимости профиля температуры в твердой фазе и критериальных уравнений, соответствующих плавлению при $T_0 \approx T_\phi$ ($T_0 < T_\phi$).

Рассмотрим процесс плавления материала, занимающего полупространство, подогреваемого снизу (рис. 1). При $T_{cm} > T_\phi$, $T_{cm} = const$, где T_{cm} - температура нижней плоскости; T_ϕ - температура фазового перехода, в нижней части образуется прослойка расплава, которая, увеличиваясь в размерах, движется вверх. Граница фазового перехода в начале плавления имеет плоскую форму и с возрастанием влияния конвекции за счет действия вихрей становится волнообразной, с небольшим отклонением от плоскости. После образования достаточно большого проплава процесс плавления выходит на режим движения границы раздела фаз с постоянной скоростью. Пренебрегая искривлением поверхности, можно считать температурное поле в твердой фазе одномерным.

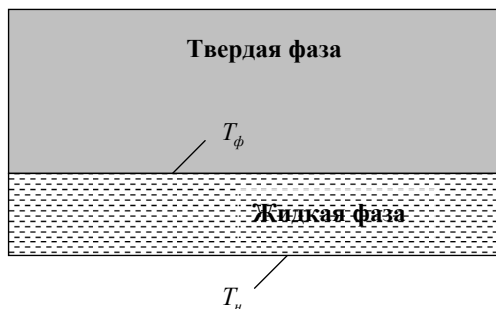


Рис. 1. Плавление слоя материала

Это температурное поле может быть получено решением краевой задачи в одномерной области $x \in [vt, +\infty)$, $t \geq 0$, где $v \neq 0$ – скорость перемещения границы:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$vt \leq x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$T(vt, t) = T_{cp}, \quad (3)$$

$$T(x) \rightarrow T_0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$T_{cp} \neq T_0.$$

При постоянстве коэффициентов c и λ имеется решение краевой задачи (1) – (4) в квадратурах, позволяющее рассчитать нестационарное температурное поле с начального момента времени [1]. В то же время при условии постоянства температуры T_{cp} на границе $x_{cp} = vt$, температурное поле $T(x, t)$ через некоторое время оказывается стационарным в системе координат Oy , перемещающейся с подвижной границей (рис. 2). Такое предельное распределение температур может быть выражено аналитически для более широких условий, когда коэффициенты задачи являются нелинейными, т.е. имеют место зависимости $c(T)$ и $\lambda(T)$. В этом случае предельное распределение температур может быть получено как решение стационарной задачи теплообмена в подвижной системе координат Oy , в которой координаты x и y связаны соотношением $y = x - vt$, причем среда приобретает скорость $-v$.

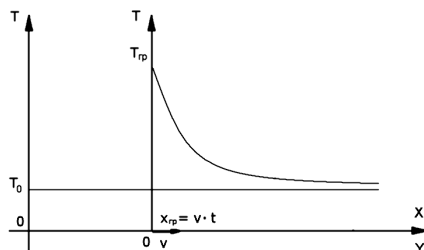


Рис. 2. Профиль температуры в области с подвижной границей

Решением будет стационарный в координатах Oy профиль:

$$y(T) = -(1/v) \cdot \int_{T_{гр}}^T dT / G(T) = -(1/v) \cdot \frac{\int_{T_0}^T \lambda(T) dT}{\int_{T_0}^T \rho c(T) dT}. \quad (5)$$

Соотношение (5) может быть проверено подстановкой.

При $\lambda = const$, $c = const$ получается более простое выражение:

$$T(x, t) = T_0 + (T_{гр} - T_0) \cdot e^{-(x-vt)/v} \cdot v \cdot e \leq x < \infty.$$

Относительно использования решения (5) в задаче плавления, следует отметить, что существует два типа условий фазового перехода на границе раздела: при фиксированной температуре $T_{\phi} = const$ для чистых веществ и в фиксированном диапазоне температур для смесей и ряда органических веществ. В первом случае тепловой эффект определяется скрытой теплотой фазового перехода, во втором – отражается пиком на зависимости удельной теплоемкости от температуры, как например, у парафинов (рис. 3).

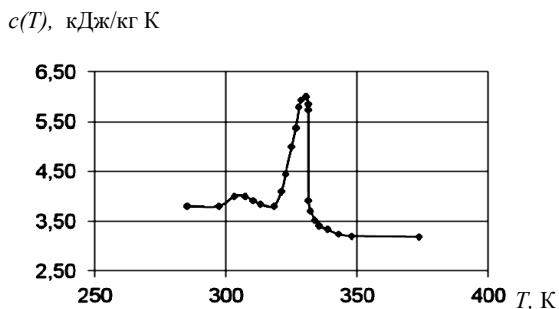


Рис. 3. Кривая теплоемкости парафина

В силу стационарности температурного поля в системе координат Oy плотность теплового потока на границе $x_{гр}$ постоянна и равна:

$$q = \int_{T_0}^{T_\phi} \rho c_{me}(T) v dT = \rho v \int_{T_0}^{T_\phi} c_{me}(T) v dT,$$

что следует из рассмотрения суммарного баланса теплоты при перемещении движущейся границы.

Для случая плавления при $T_\phi = \text{const}$ теплота, идущая на фазовый переход при перемещении границы равна:

$$q_\phi = \rho v \cdot Q_\phi.$$

Для случая фазового перехода в диапазоне температур $q_\phi = 0$.

Суммарная теплота, необходимая для плавления 1 кг вещества с учетом прогрева твердой фазы, равна:

$$Q'_\phi = (q_\phi + q) / \rho v = Q_\phi + \int_{T_0}^{T_\phi} c_{me}(T) dT. \quad (6)$$

Отсюда видно, что использование Q'_ϕ вместо удельной теплоты фазового перехода Q_ϕ позволяет свести исходную задачу плавления при $T_0 \neq T_\phi$ к задаче с условием $T_0 = T_\phi$.

При плавлении плоского слоя материала, подогреваемого снизу зависимость средней толщины прослойки расплава от времени в начальный период времени параболическая, а в дальнейшем, при достаточно развитой конвекции линейная. То есть, начиная с некоторого момента времени граница раздела фаз движется с постоянной скоростью и несколько позже температурное поле в твердой фазе приближается к зависимости (5). Подставим выражения Q'_ϕ в критериальные уравнения, соответствующие этому случаю, при условии $T_0 = T_\phi$ [2]:

$$Nu_w = C_w Ra^{1/3}, \quad Nu_f = C_f Ra^{1/3}, \quad S = S_H + Nu_f(\tau_H - \tau),$$

где

$$S_H = \left[(1700 + 12300 \cdot Ste^{0.72}) / Ra \right]^{1/3}, \\ C_w = 0.122 + 0.035 \cdot Ste^{0.85}, \\ C_f = 0.122 + 0.007 \cdot Ste^{1.31}.$$

Подставляем вместо Ste выражение для Ste' :

$$Ste' = \frac{c_{ж}(T_{cm} - T_\phi)}{Q'_\phi}.$$

После преобразования получается:

$$Nu_w = C'_w Ra^{1/3}, \quad Nu_f = C'_f Ra^{1/3}, \quad S = S_H + Nu_f \left(\tau'_H - \frac{\tau}{1 - Ste \int_0^{\tau_0} \bar{c}_{me}(T) d\theta} \right),$$

где

$$\tau' = Fo \cdot Ste' = 1 / (1 / \tau - \theta_0 / Fo) = \frac{\tau}{1 - Ste \int_0^{\tau_0} \bar{c}_{me}(\theta) d\theta},$$

$$C'_w = 0.122 + 0.035 \cdot \left(1/Ste - \int_0^{\theta_0} \bar{c}_{me}(\theta) d\theta \right)^{0.85},$$

$$C'_f = 0.122 + 0.007 \cdot \left(1/Ste - \int_0^{\theta_0} \bar{c}_{me}(\theta) d\theta \right)^{1.31},$$

$$\bar{c}_{tw}(\theta) = c_{TB}(T) / c_{сж},$$

$$\theta_0 = \int_0^{\theta_0} \bar{c}_{me}(T) d\theta.$$

Некоторую поправку необходимо внести в этом случае в расчет S'_H , поскольку в начальном периоде кондуктивного теплообмена скорость перемещения границы не постоянна, и происходит резкая перестройка температурного поля в твердой фазе. При больших периодах плавления влиянием начального участка можно пренебречь. Температурное поле может быть определено по формуле (5).

Таким образом, в результате учета на границе раздела фаз потоков теплоты, идущей на фазовый переход и прогрев твердой фазы в соответствии с температурным полем в ней, и со стороны расплава, получены зависимости (7)-(14), описывающие теплообмен в процессе плавления плоского слоя материала при подогреве снизу при $T_0 < T_\phi$.

Список литературы

1. Карташов Э.М. . Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. - М.: "Высшая школа", -1985. -480 с.
2. Галактионов В.В., Езерский А.П. . Теплоперенос в процессе плавления вещества в замкнутом объеме при подогреве снизу//ИФЖ. -1985, -Т.49, №5. -С. 756-763.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ КОНВЕРТИРОВАННЫХ ГАЗОТУРБИННЫХ УСТАНОВОК ДЛЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Б.В. Кавалеров

Пермский государственный технический университет

Существенную нишу в отечественной малой энергетике занимают мини-электростанции, создаваемые на базе конвертированных авиационных газотурбинных установок (ГТУ). Общемировая технологическая тенденция развития распределенной генерации (массовое внедрение малых энергоустановок) говорит о широких перспективах внедрения конвертированных ГТУ. Но, к сожалению, отечественные установки пока отстают от мирового уровня, и это влечет за собой все более активное

проникновение на российский рынок зарубежных изделий. Одной из причин этого является недостаточное качество вырабатываемой электроэнергии, что происходит из-за объективных сложностей с проектированием и испытанием систем автоматического управления (САУ) энергетических ГТУ, которые в своей основе продолжают строиться на авиационных прототипах и слабо учитывают специфику работы ГТУ в качестве привода электрогенераторов. Известно, что при испытании аппаратуры регулирования авиационных газотурбинных установок (ГТУ) широко применяется электронная модель ГТУ [1]. Но сегодня при испытаниях на полунатурных стендах дело ограничивается введением сбросов-набросов нагрузки со стороны электрогенератора, что не позволяет учитывать сложные и разнообразные динамические режимы электроэнергетической системы (ЭЭС). С другой стороны энергетические объекты ввиду сложности и ответственности назначения, как правило, и не допускают проведения полного набора натуральных экспериментов, необходимых для испытания управляющей системы. Ограниченные же натурные эксперименты не позволяют с нужной достоверностью оценить функционирование САУ и к тому же требуют значительных затрат времени и материальных ресурсов, т.е. весьма трудоемки. Для устранения означенного противоречия предлагается при проектировании и испытаниях САУ ввести в систему автоматизации испытаний наряду с электронной моделью энергетической ГТУ электронную модель ЭЭС, которая учитывает характерные режимы работы мини-электростанции и виды режимных возмущений. На Рис. представлена возможная структура комплексного испытательного стенда. Процесс испытания САУ связан, прежде всего, с испытанием алгоритмов управления. Известно, что наибольшие усилия по повышению надежности алгоритмического обеспечения затрачивается на этапе отладки, а в общем времени разработки отладка занимает 50-90%. Таким образом, наиболее эффективный, а иногда и единственный реальный путь повышения надежности функционирования САУ, а также снижения затрат на разработку и внедрение состоит в совершенствовании средств и методов испытания создаваемой системы на основе математического моделирования.

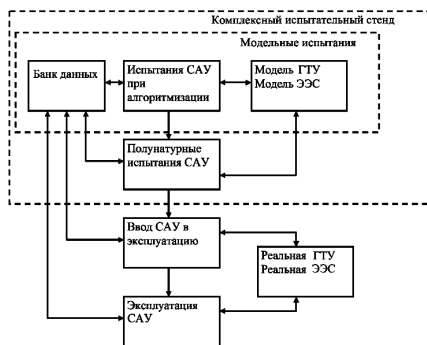


Рис.1 Структура комплексного испытательного стенда

Сформулируем задачу испытаний САУ ГТУ с использованием математической модели электрической нагрузки.

Имеем множество показателей качества переходного процесса, ограниченных допустимыми значениями:

$$Q^{доп} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \quad (1)$$

множество ограничений САУ:

$$G^{доп} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}; \quad (2)$$

множество экспериментов:

$$U^{доп} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}; \quad (3)$$

множество структур САУ:

$$R^{доп} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}, \quad (4)$$

элементами этого множества выступают множества параметрических настроек для каждой структуры САУ:

$$R_i = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}. \quad (5)$$

Требуется найти вектор R_i допустимых настроек, такой чтобы

$$F(R_i, Q, G, U) \rightarrow \min_{R_i \in R} \quad (6)$$

при системе оговоренных выше ограничений.

Количество элементов множеств (2) – (6) в общем случае различно.

Общий принцип выбора наилучшего варианта САУ по результатам испытаний предусматривает два этапа.

Сначала на основании данных о вариантах выполнения и режимах работы мини-электростанции формируется математическая модель электрической нагрузки. Технология этого процесса подробно описана в [2]. Затем происходит проверка выбранного типа САУ и вариантов ее параметрических настроек на соответствие сделанного выбора множеству G на множестве U . При удовлетворении всему комплексу требований вариант фиксируется как возможный с определенным уровнем целевой функции (6) и записывается в базу данных. В противном случае вариант настроек отвергается.

Вслед за этим решается вторая экстремальная задача выбора наилучшей настройки: из совокупности найденных приемлемых вариантов параметрической настройки выбирается оптимальный, который соответствует минимальному значению целевой функции (6) для данного типа САУ и всем ограничениям, установленным техническим заданием. Однако остается задача экспертного оценивания в условиях многокритериальности (6). Очевидно, что эффективность САУ может быть повышена за счет совместного учета всех полезных критериев из множества (1). Но выбор весовых коэффициентов многокритериальной задачи (6) при линейной свертке неоднозначен. В связи с этим для сокращения области допустимых настроек САУ предлагается использовать компромиссы Парето [3].

Анализ задач, решаемых электронной моделью ЭЭС, потребовал разработать структуру математической модели ЭЭС со следующими характеристиками.

1. Математическая модель строится как сложная модель, т.е. состоит из математических моделей структурных элементов и модели их взаимодействия.

2. Математическая модель строится как модель с гибкой структурой, т.е. позволяющей изменять состав элементов и топологию их соединений.

3. Модели структурных элементов должны быть по отношению к своим входам-выходам «модельно независимы», т.е. должна быть возможность модифицировать сложность математической модели элемента, не нарушая структуры общей модели ЭЭС, в ходе испытаний.

Исходя из этого, предложена методика создания математической модели ЭЭС в классе сложной нелинейной модели с гибкой структурой.

Математические модели элементов ЭЭС целесообразно представить в векторно-матричной форме. Такая форма записи, во-первых, позволяет записывать в единой форме модели разной степени сложности, а значит и разной размерности, и, во-вторых, прямо ориентировано на возможности компьютерной техники.

Все модели элементов ЭЭС для последующей связи с другими элементами должны быть записаны относительно их внешних переменных и управляющих переменных, если таковые имеются.

Систему уравнений структурного элемента ЭЭС относительно внешних переменных можно представить в общем виде следующим векторным уравнением:

$$p\mathbf{I} = \pm \mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{I} - \mathbf{H}, \quad (7)$$

где: $\mathbf{I}, p\mathbf{I}$ – вектор токов и вектор производных токов элемента;

$\mathbf{U}$ – вектор напряжений, приложенных между внешними зажимами элемента;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ – матрицы, размерность которых зависит от системы координат в которых моделируется структурный элемент, а также от того полные это уравнения или упрощенные;

$\mathbf{H}$ – вектор, определяющий воздействие на элемент со стороны средств регулирования электрических параметров.

Для моделирования взаимодействия элементов ЭЭС разработан алгоритм, основанный на решении уравнений связи в векторно-матричной форме и использовании метода узловых напряжений (как менее трудоемкого в сравнении с методом контурных токов).

Математическая модель взаимодействия структурных элементов использует матрицу инцидентности $\mathbf{M}$, отражающую топологию рассматриваемой локальной системы электроснабжения:

$$\mathbf{MGM}^T \mathbf{U} = -\mathbf{MW} - \mathbf{M}'\mathbf{I}, \quad (8)$$

где $\mathbf{M}$ – клеточная матрица инцидентности, клетками матрицы являются единичные, нулевые матрицы или матрицы преобразований координат; $\mathbf{M}^T$ – транспонированная матрица инцидентности; $\mathbf{G}$ – блочная матрица проводимостей ветвей (элементов), образующих систему; $\mathbf{W}$ – вектор, полученный из правых частей уравнений элементов в форме (7); $\mathbf{M}'$ – матрица, элементами которой являются нулевые клетки или клетки производных

элементов матриц преобразования координат; U – вектор искоемых напряжений узлов.

На основе представленной методики разработан программно-моделирующий комплекс для отечественных авиадвигателестроительных компаний. В настоящее время программный комплекс используется для испытания и проектирования САУ энергетических ГТУ.

Список литературы

1. Ахмедзянов А. М., Дубравский Н. Г., Тунаков А. П. Диагностика состояния ВРД по термогазодинамическим параметрам. М.: Машиностроение, 1983. – 206 с.
2. Винокур В.М., Кавалеров Б.В., Петроченков А.Б., Сапунков М.Л. Математическое моделирование газотурбинных мини-электростанций и мини-энергосистем: моногр. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 299 с.
3. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И МАССОВЫХ ПОЛЕЙ В ЗАСОЛЕННЫХ МЕРЗЛЫХ ПОРОДАХ И КРИОПЭГАХ

И.А. Комаров

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Проблема прогноза температурного и водно-солевого режима в засоленных породах и криопэгах является актуальной в связи с интенсивным хозяйственным освоением территорий шельфа и приморских низменностей, в которых находятся крупные газо- и нефтеносные провинции (п-ов Ямал и др.) и для которых характерен морской тип засоления. А также районов криолитозоны с континентальным типом засоления (Центральная Якутия и др.). Пренебрежение влиянием минерализации поровых растворов может привести к серьезным погрешностям прогнозных расчетов не только в количественном отношении, но и в качественной картине изменения во времени температурных и массовых полей в процессе промерзания-оттаивания. Территории, вблизи промышленных объектов, могут подвергнуться также и техногенному засолению. Пренебрежение влиянием минерализации поровых растворов может привести к серьезным погрешностям прогнозных расчетов. Обзор расчетных моделей дан нами в работе [1]. Однако в анализируемых там методиках поровый раствор принимался бинарным, состоящим из двух компонентов H_2O и $NaCl$. Исследователи учитывали эффект криогенного концентрирования поровых растворов в процессе промерзания, приводящего к увеличению общей минерализации, оставляя без внимания вопрос об изменении водно-ионного состава. В особенности для криопэгов морского генезиса этими изменениями пренебречь нельзя [2].

В докладе рассматривается методика прогноза температурного режима криопэга и вмещающих его засоленных пород для двух случаев его расположения в слое годовых амплитуд: криопэг находится вблизи поверхности (но ниже границы слоя сезонного оттаивания), когда амплитуда колебаний температуры существенна; криопэг находится вблизи нижней границы слоя, когда амплитуда колебаний температуры минимальна.

Решается одномерная задача теплопроводности для массива сезонно – талых пород, в котором находится криопэг, представленный плоско – параллельной линзой песчаных пород, содержащих высокоминерализованный рассол. В массиве вмещающих пород и криопэге происходят фазовые переходы в спектре отрицательных температур с образованием подвижных границ раздела талой, мерзлой и охлажденной зон. Модель учитывает: изменение водно-солевого состава криопэга от температуры; влияние концентрации и солевого состава вод криопэга на температуру начала замерзания, содержание незамерзшей воды и льда в нем.

При формулировке задачи использовались следующие допущения и предпосылки: криопэг промерзает по типу «закрытой системы», не мигрирует и не меняет своей геометрии; теплофизические свойства мерзлой, талой, охлажденной зон криопэга и вмещающих пород кусочно – постоянны; химическое и адсорбционное взаимодействие рассола с породой отсутствует; переносом ионов за счет диффузии и конвекции пренебрегаем; тепловые эффекты, связанные с выпадением солей из раствора в твердую фазу и выделением (поглощением) теплоты растворения, малы по сравнению с теплотой идущей на фазовый переход вода-лед.

На дневной поверхности выделенного массива пород, с учетом сезонного наличия снежного покрова, задавались граничные условия первого рода $T=f(\tau)$, где T – температура, τ – время, а на нижней границе – граничное условие II рода величина теплового потока q . Частичное отжатие солей в криопэг при промерзании учитывалось коэффициентом захвата соли K_{zx} (коэффициент межфазного распределения), по соотношению :

$$K_{zx} = G_{sl} / G_{sg} , \quad (1)$$

где G_{sl} и G_{sg} – концентрации соли во льду и поровом растворе (криопэге), соответственно.

Реализация модели осуществлялась с помощью использования программ «Тепло» [3], разработанной под руководством Л.Н. Хрусталева, которая реализует краевую задачу теплопроводности в энтальпийной постановке при помощи явной конечно- разностной схемы с произвольно задаваемым шагом сетки и «FREEZBRINE» для оценки изменения водно-ионного состава криопэга от температуры» [4]. Последняя используя метод минимизации свободной энергии Гиббса и модель Питцера [5], позволяет моделировать поведение водно-солевых систем в области отрицательных температур, т.е. рассчитать химическое равновесие между водными растворами электролитов, льдом и солями, находящимися в свободном объеме.

Для оценки теплового взаимодействия криопэга с вмещающим массивом засоленных мерзлых пород было выполнено сравнительное моделирование

динамики температурных полей в годовом цикле, для двух случаев: криопэг расположен вблизи поверхности (в СТС); криопэг расположен вблизи глубины нулевых годовых амплитуд. Рассматривались три варианта в зависимости от скорости промерзания пород в СТС: I - с полным захватом солей льдом $K_{zx} = 1$ (крайне высокая скорость промерзания, или эвтектическое вымерзание рассола при очень низких температурах); II - с полным отжатию солей в поровый раствор, образуется пресный лед (крайне низкая скорость промерзания) $K_{zx} = 0$; III - с частичным отжатию $1 > K_{zx} > 0$. Величина коэффициента захвата зависит от скорости промерзания, в частности, для ряда растворов его значения приведены в работе [6]. Поэтому при реализации алгоритма расчета в программе требовалась корректировка на величину скорости промерзания. Для учета теплового эффекта промораживания пород (рассола криопэга) использовалась величина эффективной теплоемкости $C_{эф}$, которая для рассматриваемого случая запишется как:

$$c_{эф}(T, W, M, G) = c_M(T, M, G) + \frac{dW_{нз}(T, M, G)}{dT} L(M, G), \quad (2)$$

где W – влажность, $W_{нз}$ – содержание незамерзшей воды, G и M – концентрация и ионный состав порового раствора (криопэга), C_M – теплоемкость мерзлой породы, L – скрытая теплота фазового перехода (замерзания)

При численной реализации исследуемая область представлялась в виде блоков. В талом или охлажденном состоянии для блока задаются теплофизические параметры, соответствующие породе с определенной концентрацией порового раствора (рассола криопэга), а в мерзлом состоянии - с концентрацией учитывающей коэффициент захвата солей.

Выбор входных параметров расчетной схемы и результаты моделирования

Моделирование проводилось применительно к климатическим условиям характерным для полуострова Ямал. Климатические данные, были приняты по нормативным документам для района Маре - Сале (СНиП 23-01-99) [7]. Температурная зависимость изменения фазовой фазового состава криопэга $W_{нз} = f(T)$ с известным ионным составом, который соответствовал морскому типу засоления, оценивалась с помощью программы «FREEZBRINE». Эти кривые аппроксимировались рядом прямых тангенс угла наклона которых различен в диапазоне отрицательных температур. Мощность линзы криопэга составляла 0,5 м. Концентрация солевого раствора в криопэге была принята $G_s = 100$ г/л, с температурой начала замерзания $t_{нз} = -5,8$ °C, величина его коэффициента теплопроводности задавалась равной $\lambda_m = 0,65$ Вт/м К, а теплоемкости $C_m = 3000$ КДж/м³ К. Для вмещающих пород их теплофизические свойства в талом λ_m и мерзлом λ_m состояниях, а также температура начала замерзания $t_{нз}$ и температурная зависимость содержания незамерзшей воды $W_{нз} = f(T)$ выбирались по данным работы [1], соответственно $C_m = 1900$ КДж/м³ К, $\lambda_t = 1,3$ Вт/м К, $\lambda_m = 1,6$ Вт/м К, $t_{нз} = -0,9$ °C.

Результаты реализации модельной задачи, в частности, значения экстремальных температур и амплитуд у нижней границы криопэга для 3-ех вариантов с различным значением коэффициента захвата приведены в таблице

1. Из неё видно, что криопэг оказывает отепляющее влияние на нижележащие породы, в первую очередь, за счет более низкой теплопроводности криопэга по отношению к теплопроводности вмещающих пород, приводя к повышению среднегодовой температуры. С увеличением эффекта отжатия солей в охлажденную зону отепляющее влияние возрастает. Возникновение фронта связанного с промерзанием непосредственно криопэга (аналогичному тому, который образуется при промерзании вмещающих пород), приводит к экранированию нижележащих слоев от проникновения низкотемпературных колебаний, уменьшая величину амплитуды, по сравнению с таковой получаемой при решении задачи в отсутствие криопэга. Для криопэга, находящегося вблизи поверхности, скорость промерзания будет выше, чем для находящегося вблизи подошвы слоя нулевых годовых амплитуд.

Следует отметить, что при дифференцированном рассмотрении влияния отдельных сезонов картина становится неоднозначной. Так в период с отрицательными температурами воздуха в массиве пород с криопэгом отмечается понижение температуры по сравнению с массивом без него. Причем с увеличением глубины расположения эта разница увеличивается, например, для января месяца от 0,3 до 0,6 °С. Для периода с положительными температурами воздуха, наоборот, отмечается повышение температуры, для июня от 1.8 до 2.5 °С. По полученным данным, концентрация раствора криопэга (общая минерализация) изменялась в зависимости от сезона пределах 45-85 г/л, т.е. почти в два раза.

Таблица 1
Значения экстремальных температур ($T_{\min}$, $T_{\max}$)
и амплитуды (А) у нижней границы криопэга.

Глубина залегания криопэга, м	Значения температур и амплитуд, °С	Криопэг отсутствует	Криопэг находится в слое годовых амплитуд		
			$k_{zx} = 1$	$k_{zx} = 0,5$	$k_{zx} = 0$
2,0-2,5	$T_{\min}$	-6,1	-5,7	-5,2	-5,1
	$T_{\max}$	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
	А	4,4	4,0	3,5	3,4
8,0-8,5	$T_{\min}$	-4,7	-4,5	-4,5	-4,5
	$T_{\max}$	-3,9	-3,9	-3,9	-3,9
	А	0,8	0,6	0,6	0,6

Список литературы

1. Комаров И.А. Термодинамика и тепломассообмен в дисперсных мерзлых породах. М.: Научный мир, 2003, 608 с.
2. Комаров И. А., Волков Н.Г., МIRONENKO М.В., С.М.Фотиев и др. Методики прогноза температурного и водно-ионного режима в засоленных породах и криопэгах (проблемы, решения).// Материалы Международной

конференции Теория и практика оценки состояния криосферы Земли и прогноз ее изменения. Тюмень, 2006, стр. 30-35

3. Основы геокриологии. Инженерная геокриология. часть 5, М.: Изд-во МГУ, 1999, 526 с.

4. Комаров И.А., Мироненко М.В., Пустовойт Г.П. Разработка программного продукта для прогноза температурного и ионно-солевого режима засоленных пород и криопэгов // Доклады на Международной конференции Криогенные ресурсы полярных и горных регионов, состояние и перспективы инженерного мерзлотоведения. Тюмень, 2008, с. 404-407

5. Pitzer K.S. A thermodynamic model for aqueous solutions of liquid-like density. Reviews in Mineralogy, 17, 1987. p. 97-142

6. Пермяков П.П., Романов П.Г. Тепло- и солеперенос в мерзлых ненасыщенных грунтах. Якутск: ЯФ Изд-ва СО РАН, 2000. 128 с.

7. СНиП 23-01-99. Строительная климатология, М., 1999

8. Теплофизические свойства горных пород. М.: Изд-во МГУ, 1984. 204с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНО-ИОННОГО СОСТАВА ЗАСОЛЕННЫХ МЕРЗЛЫХ ПОРОД И КРИОПЭГОВ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕРМОБАРИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

И.А. Комаров, *М.В. Мироненко

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

*ГЕОХИ РАН им.В.И. Вернадского

Проблема совершенствования методической и нормативной базы по расчетной оценке температуры замерзания и фазового состава водных растворов в засоленных грунтах является актуальной в связи с интенсивным хозяйственным освоением территорий шельфа и приморских низменностей, в которых находятся крупные газо- и нефтеносные провинции (п-ов Ямал и др.) и для которых характерен морской тип засоления, а также районов криолитозоны с континентальным типом засоления (Центральная Якутия и др.). Территории вблизи промышленных объектов, могут подвергнуться также и техногенному засолению.

Существующие методики прогноза водно-ионного режима сильнозасоленных пород и криопэгов обычно ограничены рассмотрением случая, когда поровый раствор можно условно рассматривать как бинарный (двухкомпонентный раствор $H_2O + NaCl$ —приближение для пород с морским типом засоления при относительно небольшой минерализации. В их основе лежат различные модификации криоскопической формулы из теории растворов, с учетом изотонического коэффициента или без. Обзор этих методов дан в работе [1]. Однако нормальность легкорастворенных солей в поровых растворах пород, может достигать величин 2-3 и более. Для случая произвольной концентрации бинарного порового раствора единая методика нахождения температур замерзания и фазового состава влаги, как в

засоленных, так и незасоленных породах предложена в работе [2]. Основные предпосылки, используемые для построения модели, алгоритм программы, методика выбора параметров расчетной схемы, необходимый справочный материал и результаты сопоставления с экспериментальными данными приведены в работе [1]. В основе вывода расчетной формулы используется аддитивность величины химического потенциала порового раствора $\Delta \mu$, которая складывается из ее составляющих характеризующих адсорбционную $\Delta \mu_a$, $+\Delta \mu_k + \Delta \mu_o$, капиллярную $\Delta \mu_k$ и осмотически $\Delta \mu_o$ связанную влагу породе, т.е. $\Delta \mu = \sum_i^2 \Delta \mu_i$, где i – индекс, при суммировании по i , здесь и далее принимается, что при $i = 1$ оценивается только суммарная роль поверхностных и менисковых сил, которая равна $\Delta \mu_v = \Delta \mu_a + \Delta \mu_k$, а при $i = 2$ – только влияние растворенных ионов $\Delta \mu_o$.

Соотношение для оценки величины химического потенциала $\Delta \mu$ порового раствора, имеет вид:

$$\Delta \mu = RT \sum_i^2 \ln a_i = RT \sum_i^2 \ln(m_j \gamma_j)_i \quad (1)$$

где: a , γ – активность и коэффициент активности, соответственно; m – концентрация; R – газовая постоянная; T – температура; j – номер компонента.

Общее уравнение для оценки параметров фазового равновесия влаги в незасоленных и засоленных породах будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_1^2 [\ln(m_j \gamma_j)_i]_{T=T_0} = & \sum_1^2 \left[-\frac{\chi \theta_i}{RT_0^2} \sum_1^n \frac{n}{n} \left(\frac{\theta_i}{T_0}\right)^{n-1} \right] + \sum_1^2 \left[\frac{\alpha_i \theta_i^2}{RT_0^2} \sum_1^n \frac{n}{n+1} \left(\frac{\theta_i}{T_0}\right)^{n-1} \right] + \\ & \sum_1^2 \left[\frac{\beta_i \theta_i^3}{RT_0^2} \sum_1^n \frac{n}{n+2} \left(\frac{\theta_i}{T_0}\right)^{n-1} \right] + \sum_1^2 \left[\frac{\eta_i \theta_i^4}{RT_0^2} \sum_1^n \frac{n}{n+3} \left(\frac{\theta_i}{T_0}\right)^{n-1} \right] + \\ & \frac{I}{R} \left[\frac{(T_v - T_0) + \theta_i}{T_v(T_0 - \theta_i)} \right] \sum_i^2 (H_j^0 - H_j)_i, (n=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2)$$

где: χ – скрытая теплота фазового перехода; $T_0=273,15$ К; θ – температура замерзания; T_v – текущая температура, α_i , β_i , η_i – коэффициенты, находимые из экспериментальных данных по теплоемкости, которые представляют в виде степенного ряда по температуре, как разность соответствующих коэффициентов для льда и переохлажденной воды ($i = 1$), для засоленных пород ($i = 2$). Эти коэффициенты будут определяться по разности теплоемкости для льда и поровых растворов; $\Delta H = H_j - H_j^0$ – разность молярных энтальпий поровой влаги (раствора) и влаги в свободном объеме при стандартных условиях, которая для незасоленных пород ($i = 1$) представляет по физическому смыслу дифференциальную теплоту смачивания или адсорбции (находятся из обработки данных по изотермам сорбции или данных по зависимости набухания от давления полученных при положительных или отрицательных температурах), а при $i = 2$ – дифференциальную теплоту растворения ионов солей в объемном растворе.

Алгоритм расчетов следующий: на первом шаге ($i=1$) уравнение (2) рассчитывает температуру замерзания для незасоленной породы, а параметры, подставляемые в уравнение, соответствуют фиксированному значению влажности породы, для которой и находится температура замерзания; на втором шаге ($i=2$) решение уравнения (2) есть температура замерзания засоленной породы, здесь входные параметры вводятся для фиксированного значения концентрации порового раствора и определенного типа засоления породы. Проведение серий расчетов при разных задаваемых значениях влажности и засоленности, а следовательно концентрации порового раствора, позволяет получить температурные кривые фазового состава при различных значениях засоленности.

Для пород с полиионным засолением порового раствора и криопэгов, хоть сколько-нибудь приемлемых методов температуры замерзания пород не существует, но имеется материал для водных растворов солей в свободном объеме. Химический аспект моделирования поведения вводно-солевых систем в области отрицательных температур в конечном итоге сводится к расчету фазового состава систем различного валового химического состава в ряде пространственно-временных ячеек, характеризующихся определенной температурой и давлением. Валовый химический состав, температура и давление могут быть заданы априори или являться решением задачи тепломассопереноса. При низких температурах скорости взаимодействия растворов с минералами вмещающих алюмосиликатных пород несопоставимо малы по сравнению со скоростями установления вводно-солевых и водно-газовых равновесий, а также с замерзанием или оттаиванием растворов, поэтому полагается, что системы состоят из раствора электролита, солей (включая карбонаты), льда и газовой фазы. Алюмо-силикатные породы полагаются химически инертными.

Используя модель К. Питцера [3] для расчета коэффициентов активности и активности воды, в лаборатории CRELL(CША) для системы Na-K-Ca-Mg-Cl-SO₄-H₂O была разработана программа, для вычисления химического равновесия между водными растворами электролитов, льдом и солями [4]. Равновесный состав системы при заданных значениях температуры, давления и валовом химическом составе рассчитывается методом минимизации функции свободной энергии Гиббса. Расчет реализуется при балансе анионов и катионов, т.е. при соблюдении условия электронейтральности. Определяется фазовый состав системы, а также концентрации и активности компонентов раствора электролитов для сценариев охлаждения/нагревание при постоянном валовом составе системы или испарение/разбавление при постоянной температуре. Используя эту модель, в работе [5] была предложена новая методика оценки температуры формирования ионно-солевого состава криопэгов морского генезиса по кривой десульфатизации (температурной зависимости концентрации сульфат-иона). Она позволяет на основании химического анализа пробы конкретного криопэга, с помощью моделирования восстановить величину минимального значения температуры, при которой произошло формирование ионно-солевого состава криопэга. Эта температура

соответствует температуре начала кристаллизации мирабилита для каждой конкретной пробы криопэга и четко фиксируется на кривой десульфатизации. Причем для корректного определения температуры формирования ионно-солевого состава криопэга морского генезиса не обязательно знать исходный состав морской воды, из которой сформировался криопэг. С помощью предложенной методики по кривой десульфатизации оценены температурные условия формирования ионно-солевого состава криопэгов п-ова Ямал [6].

Однако дальнейший прогресс в исследовании был ограничен возможностями используемых моделей и разработанного аппарата. Так для анализа данных водных вытяжек пород и проб криопэгов кроме указанных 7 компонентов, используемых в «FREZCHEM2» необходимо учитывать также наличие карбонатов, бикарбонатов и соответствующих солей кальцита, доломита, гипса, соединений железа и т.д., а также наличие газовой фазы, в частности, H_2O , CO_2 , CH_4 . Реальная физическая картина протекающих в природе процессов указывает на целесообразность учета: а) давления вышележащих пород; б) наличия водоносных горизонтов, т.е. ситуации, когда порода или криопэг обменивается каким-то компонентом с окружающей средой (режим открытой системы); в) ситуации, когда при промерзании из порового раствора породы или криопэга выпадают вновь образованные твердые фазы солей, которые при повышении температуры не переходят обратно в жидкую фазу (фракционная кристаллизация).

Указанных ограничений лишена термодинамическая модель и разработанная на ее основе программа «FREEZBRINE». Она включает в себя следующие химические компоненты, которые могут быть образованы в системе. Раствор (23 компонента): катионы : Na^+ , K^+ , Ca^{+2} , Mg^{+2} , H^+ , $Mg(OH)^+$, Fe^{+2} , $FeOH^+$; анионы : Cl^- , SO_4^{-2} , OH^- , HCO_3^- , CO_3^{-2} , HSO_4^- , NO_3^- ; нейтральные : $CO_2(aq)$, $FeCO_3(aq)$, $CaCO_3(aq)$, $MgCO_3(aq)$, $H_2(aq)$, $O_2(aq)$, $CH_4(aq)$, $H_2O(l)$;

Газы (8 компонентов): $O_2(g)$, $H_2(g)$, $CH_4(g)$, $CO_2(g)$, $H_2O(g)$, $HCl(g)$, $HNO_3(g)$, $H_2SO_4(g)$; Твердые фазы (56 компонентов): основные их них : $H_2O(cr,l)$, $NaCl \cdot 2H_2O$, $HALITE$, $SYLVITE$, $CaCl_2 \cdot 6H_2O$, $MgCl_2 \cdot 6H_2O$, $CaCl_2 \cdot 2MgCl_2 \cdot 12H_2O$, $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$, $MgSO_4 \cdot 6H_2O$, K_2SO_4 , $MgSO_4 \cdot K_2SO_4 \cdot 6H_2O$, $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, $ANHYDRITE$, $Na_2SO_4 \cdot 3K_2SO_4$, $CALCITE$, $MAGNESITE$, $CaCO_3 \cdot 6H_2O$, $NaHCO_3$, $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$, $DOLOMITE$, $ARAGONITE$, $VATERITE$, $HNO_3 \cdot 3H_2O$, KNO_3 , $NaNO_3$, $Na_3H(SO_4)_2$, $MgSO_4 \cdot H_2O$, $FeSO_4 \cdot 7H_2O$, $FeCl_2 \cdot 6H_2O$, $FeCl_2 \cdot 4H_2O$, $SIDERITE$, и др.

Равновесный состав системы при температуре T , давлении P и заданном валовом химическом составе ищется методом минимизации свободной энергии Гиббса на множестве линейных ограничений в виде системы уравнений баланса масс. Приведенная функция свободной энергии системы, содержащей M твердых фаз, водный раствор (компоненты: вода и растворенные частицы) и L -компонентную газовую фазу, записывается следующим образом:

$$g = \frac{G}{RT} = \sum_{k=1}^M \mu_k^0 n_k + (\mu_w n_w + \sum_{j=1}^J \mu_j n_j) + \sum_{l=1}^L n_l \mu_l, \quad (3)$$

где G – свободная энергия, g – приведенная свободная энергия системы, n – молярные количества компонентов, μ – химические потенциалы компонентов, при этом μ_w – химический потенциал воды, μ_k^O – стандартный химический потенциал однокомпонентной твердой фазы k (соли или лед), R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура. M – количество твердых фаз, J – количество растворенных частиц, L – количество газовых частиц. Химический потенциал частицы водного раствора в терминах молярной концентрации (моль/кг воды, $m_j = \frac{n_j}{n_w} \cdot 55.51$) определяется как $\mu_j = \mu_j^0 + \ln a_j = \mu_j^0 + \ln(m_j \gamma_j)$, где μ_j^O – стандартный (при бесконечном разведении) химический потенциал.

Химический потенциал воды может быть записан как $\mu_w = \mu_w^0 + \ln a_w$, где активность воды a_w , определяется через осмотический коэффициент раствора и молярности растворенных частиц с учетом молекулярной масса воды W :

$$\ln a_w = -\phi \frac{W}{1000} \left(\sum_j m_j \right) \quad (4)$$

Химические потенциалы частиц газового раствора определяются как $\mu_i = \mu_i^0 + \ln a_i = \mu_i^0 + \ln(x_i \gamma_i)$, где μ_i^0 – стандартный химический потенциал,

$$x_i = \frac{n_i}{\sum_{l=1}^L n_l} \text{ – молярные доли частиц.}$$

Соответственно функция свободной энергии системы принимает вид

$$g(\vec{n}) = \sum_{k=1}^M \mu_k^0 n_k + n_w (\mu_w^0 - \phi \frac{\sum_{j=1}^J n_j}{n_w}) + \sum_{j=1}^J n_j (\mu_j^0 + \ln(\frac{n_j 55.51}{n_w} \gamma_j)) + \sum_{l=1}^L (\mu_l^0 + \ln(\frac{n_l}{N_L} \gamma_l)) \quad (3.a)$$

Ограничения баланса масс, включая, при необходимости, уравнение электронейтральности, записываются в виде системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{M+1+J+L} v_{ij} n_j = B_i, \quad i=1, P \quad (5)$$

где P – число независимых компонентов системы. B_i – количество молей независимого компонента i в системе. Для уравнения электронейтральности $B_i = 0$. В матричном виде система (3) может быть записана как: $N \vec{n}^T = \vec{B}$, где N – стехиометрическая матрица, $\vec{n}$ – вектор количества молей компонентов, $\vec{B}$ – вектор валового химического состава системы.

Таким образом, задача расчета равновесного состава сводится к нахождению минимума функции (3), удовлетворяющему системе линейных уравнений (5). Выражение свободной энергии системы, наряду с неизвестными n , содержит параметры μ^0 – стандартные химические потенциалы (или стандартные свободные энергии Гиббса) компонентов, активность воды a_w и γ – коэффициенты активности растворенных компонентов и газов. Параметры, необходимые для расчета этих величин и представляют собой предмет базы термодинамических данных для рассматриваемой модели.

Константы равновесия химических реакций (произведения растворимости, константы диссоциации и гидролиза, растворимости газов) согласованы, частично получены заново и аппроксимированы как функция температуры Ж. Марионом [7,8]. Алгоритм расчета равновесного состава водно-солевых систем приведен в работе[9]. Программа «FREEZBRINE» работает в различных режимах: «закрытые или открытые системы», «равновесная или фракционная кристаллизация», «промерзание-оттаивание», «изменение давления», «идеальные –неидеальные газы », «испарение-конденсация воды». При выбранных режимах: «закрытые или открытые системы» , «равновесная или фракционная кристаллизация», «идеальные – неидеальные газы » модель позволяет рассчитывать одновременно один из следующих сценариев: *Промерзание-оттаивание*. В этом случае рассчитывается серия равновесий в заданном интервале температур с заданным шагом изменения температуры при постоянном заданном давлении. Если температура понижается, вычисления заканчиваются по достижении точки эвтектики (полная кристаллизация раствора); *Изменение давления*. Рассчитывается серия равновесий в заданном интервале давлений с заданным шагом изменения давления при постоянной заданной температуре; *Испарение*. Рассчитывается серия равновесий при постоянных температуре и давлении на фоне удаления воды из системы. Задается конечное содержание воды в граммах. Начальное содержание по умолчанию принимается равным 1000 граммов.

Выходные данные для каждого заданного шага содержат информацию по содержанию воды, ионов и солей в жидкой , твердой и газообразной фазах, основные термодинамические параметры системы, плотность и РН растворов и др. Программа «FREEZBRINE» в комплексе с модификацией программы «Тепло» может быть использована для прогноза температурного и водно-ионного режима засоленных мерзлых пород и криопэггов [10].

Список литературы

1. *Комаров И.А.* Термодинамика и тепломассообмен в дисперсных мерзлых породах. М.: Научный мир, 2003, 608 с.
2. *Комаров И.А.* Единая термодинамическая модель фазового, адсорбционного и химического равновесия поровой влаги в мерзлых породах // Геозкология. 2001. №3. с. 244-259.
3. *Pitzer K.S.* A thermodynamic model for aqueous solutions of liquid-like density. Reviews in Mineralogy, 17, 1987. p. 97-142
4. *Mironenko M.V., Grant S.A., Marion G.M., and Farren R.E.* FREZCHEM2. A Chemical Thermodynamic Model for Electrolyte Solutions at Subzero Temperatures // CRREL Report 97-5, October 1997, 40 p.
5. *Волков Н.Г., Комаров И.А., Мироненко М.В., Фотиев С.М.* Методики оценки температуры формирования ионно-солевого состава криопэггов // Криосфера Земли, 2005, т. IX, № 4, с.54-61.

6. Комаров И.А., Волков Н.Г., Фотиев С.М., Мироненко М.В., Стрелецкая И.Д., Ковальчук А.Н. Методики прогноза температурного и водно-ионного режима в засоленных породах и криопэггах (проблемы, решения). // Материалы Международной конференции Теория и практика оценки состояния криосферы Земли и прогноз ее изменения. Тюмень, 2006, стр. 30-35

7. Marion G M. Carbonate mineral solubility at low temperatures in the Na-K-Mg-Ca-H-Cl-SO₄-OH-HCO₃-CO₃-CO₂-H₂O system. *Geochim. Cosmochim. Acta*, 2001, 65, 1883-1896.

8. Marion G.M. and Kargel J.S. (2008) Cold aqueous planetary geochemistry with FREZCHEM: from modeling to the search of life at the limits. Springer.

9. Мироненко М.В., Поляков В.Б. Об алгоритме расчета равновесного составоводно-солевых систем на основе модели Питцера. *Геохимия*, 2009, №10, с.1103-1107

10. Комаров И.А., Мироненко М.В., Пустовойт Г.П. Разработка программного продукта для прогноза температурного и ионно-солевого режима засоленных пород и криопэггов // Доклады на Международной конференции Криогенные ресурсы полярных и горных регионов, состояние и перспективы инженерного мерзлотоведения. Тюмень, 2008, с. 404-407

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ДВУХФАЗНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ

Д.А. Крылов, П.В. Храпов, Н.И. Сидняев, А.А. Федотов
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Решена задача по распределению температуры в грунтовой среде с фазовыми переходами грунт – жидкость. Тепловое состояние такой дисперсной среды с учетом теплоты фазового перехода описывается уравнением теплопроводности вида [1,2]

$$\begin{aligned} [c(x, y, z, u)\rho(x, y, z, u) + Q\delta(u - u^*)] \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + s(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; λ – коэффициент теплопроводности; $u(x, y, z, t)$ – температура среды; u^* – температура фазового перехода; Q – теплота фазового перехода; s – мощность внутренних источников тепла; $\delta(u - u^*)$ – дельта-функция.

Решение u требуется найти в ограниченной области – прямоугольном параллелепипеде $D = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \quad (2)$$

На границе $z=0$ с температурой происходит конвективный теплообмен

со средой, имеющей температуру $\theta(t)$ [3]. Плотность теплового потока на этой границе задается через коэффициент теплоотдачи h в виде

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} = h(\theta(t) - u(x, y, 0, t)). \quad (3)$$

Коэффициент теплоотдачи h записывается в виде

$$h = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + R},$$

где α - коэффициент конвективного теплообмена и R - коэффициент термического сопротивления.

На границе $z = L_z$ поддерживается постоянный тепловой поток (поток из недр Земли)

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} = q_E = 0,043 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{ч}}. \quad (4)$$

Боковые границы области D теплоизолированы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L_x, y, z, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, L_y, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве примера рассматривается задача о распределении температурных полей в грунте в районах с сезонными промерзаниями и оттаиваниями почвы. Область исследования D имеет вид куба. Плоскость Oxy соответствует поверхности земли. Ось Oz направлена вглубь грунта. Характеристики области D : $L_x = 21$ м., $L_y = 15$ м., $L_z = 17$ м. Область D состоит из 3 литологических слоев: D_1 , D_2 и D_3 . Эти множества задаются следующим образом

$$\begin{aligned} D_1 &= \{ \forall M(x, y, z) \in D : 0 < z < 2 \}, \\ D_2 &= \{ \forall M(x, y, z) \in D : 6 < x < 21, 2 < z < 6 \}, \\ D_3 &= D \setminus (D_1 \cup D_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Параметры уравнения теплопроводности зависят от типа литологического слоя, от времени и от фазового состояния [4, 5].

Верхняя граница области $z = 0$, разбита на 3 зоны. В зоне 2 располагается производственное здание, физические характеристики в этой зоне остаются постоянными во времени. Условия в зонах 1 и 3 изменяются по интервалам времени – месяцам года.

Поставленная задача решалась численно методом контрольного объема. Число контрольных объемов по x , y и z составило, соответственно, 40, 30 и 35, общее число элементов в расчетной области равняется 42000. В качестве рассматриваемого интервала времени выбран интервал 5 лет. Число итераций по времени выбрано равным 6000 [3,4].

На вертикальных линиях, проходящих параллельно оси Oz через точки наблюдения $M_1(1.5, 1)$ – под зданием и $M_2(9, 5)$ – в непосредственной близости от здания, представлены зависимости температуры u в этих точках от времени

t на различных глубинах (рисунки 1, 2).

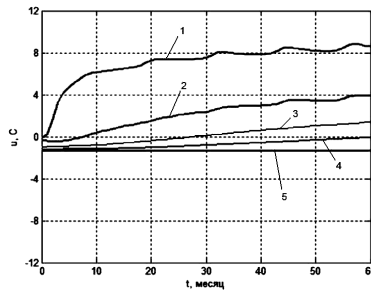


Рис.1. Зависимость температуры от времени в точке M_1 1 – на глубине 1м., 2 – на глубине 3м., 3 – на глубине 5м., 4 – на глубине 7м., 5 – на глубине 15,5м.

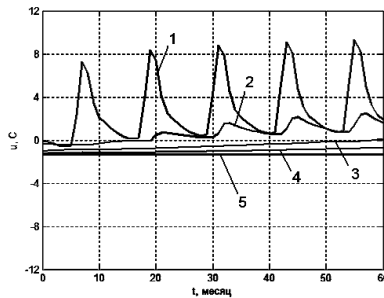


Рис.2. Зависимость температуры от времени в точке M_2 1 – на глубине 1м., 2 – на глубине 3м., 3 – на глубине 5м., 4 – на глубине 7м., 5 – на глубине 15,5м.

На значительном отдалении от здания ($M_3(19.5, 13.5)$) распределение температуры схоже с представленным на рис.2, но без ярко выраженного положительного тренда. По результатам исследования следует отметить, что под зданием будут скапливаться оттаявшие грунты, и здание может осесть в котлован, образующийся под собственной тяжестью, а затем и вовсе разрушиться. Для предотвращения разрушения используются свайный фундамент и сезонно охлаждающие устройства (СОУ).

При моделировании свайного фундамента были рассмотрены 6 свай. Сваи состоят полностью из тяжелого (обычного) бетона. Плотность свай взята $\rho_b = 2300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, удельная теплоемкость $c_b = 0,2 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, коэффициент теплопроводности $\lambda_b = 1,5 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot ^\circ\text{C}}$, фазовый переход в бетонной свае не происходит. Глубина залегания свай составляет 8 м. Программно сваи задаются как 4-ый литологический слой.

Характер изменения температурного поля в области D практически не отличается от модели здания без свай. Глубина оттаивания к концу лета 5-го года составляет примерно 7 м. при глубине залегания свай 8 м. Для уменьшения глубины оттаивания обычно используют СОУ (или термостабилизаторы).

Термостабилизатор — это парожидкостное устройство для охлаждения грунтов, представляющее собой металлическую герметично запаянную, заправленную хладагентом трубку диаметром от 36 до 57 мм, длиной от 6 до 10 м и более, состоящее из конденсатора с оребрением (надземной части длиной в пределах 1—2,5 м) и испарителя (подземной части длиной от 5 до 9 м и более) [5]. Работа осуществляется без внешних источников питания, только за счет законов физики — переноса тепла вследствие испарения в испарителе хладагента и его поднятия в конденсаторную часть, где пар конденсируется, отдавая тепло, и стекает по внутренним стенкам трубы вниз.

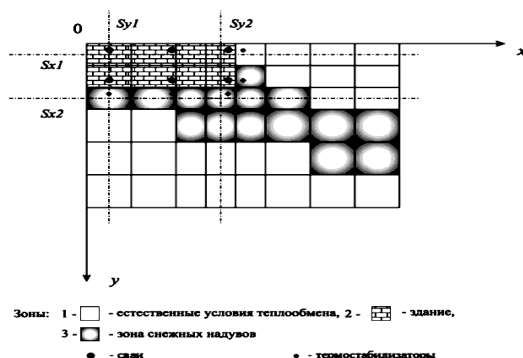


Рис. 3. Верхняя граница расчетной области для здания со свайным фундаментом и термостабилизаторами.

В расчетах моделировался термостабилизатор с глубиной погружения в грунт $z_0 = 8 \text{ м.}$, общей длиной 9 м. и мощностью $s_0 = 28.3932 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч}}$.

Термостабилизатор работает с 1 октября по 31 марта и не работает с 1 апреля по 30 сентября каждого года. Термостабилизатор рассматривается как бесконечно тонкий стержень:

$$s(x, y, z, t) = s_0(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot I_{[0, z_0]}(z). \quad (7)$$

Здесь (x_0, y_0) – координаты размещения термостабилизатора в грунте, $I_{[0, z_0]}(z)$ – индикатор сегмента $[0, z_0]$. Расположение термостабилизаторов представлено на рис. 3.

На рис. 4, 5 представлена динамика изменения температуры под зданием и вблизи него. Очевидно, что с течением времени под зданием будет накапливаться холод. На рис. 9, 10 представлены разрезы вдоль оси x и y соответственно. По ним заметно, что температуры под сваями, находящимися на различном расстоянии от начала координат (центра здания), различны. Это

может привести к просадке здания в середине в первый год. Для избежания этого необходимо располагать термостабилизаторы в непосредственной близости от свай.

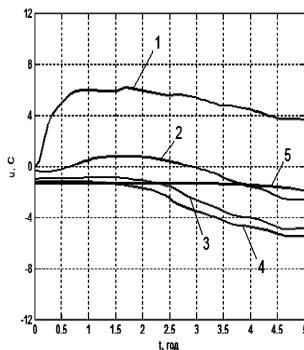


Рис.4. Зависимость температуры от времени в точке M_1 1 – на глубине 1м., 2 – на глубине 3м., 3 – на глубине 5м., 4 – на глубине 7м., 5 – на глубине 15,5м.

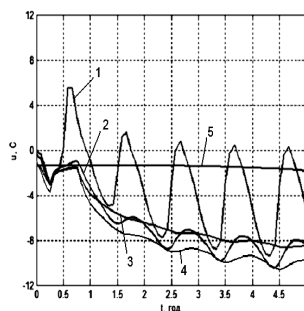


Рис.5. Зависимость температуры от времени в точке M_2 1 – на глубине 1м., 2 – на глубине 3м., 3 – на глубине 5м., 4 – на глубине 7м., 5 – на глубине 15,5м.

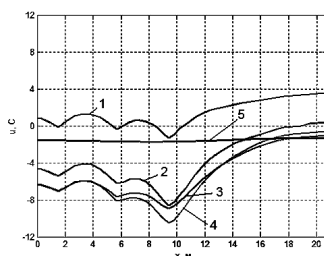


Рис.6. Зависимость температуры от координаты x в разрезе $y=5\text{м.}$ ($Sx2$) в момент времени 01.10.05 1 – на глубине 1м., 2 – на глубине 3м., 3 – на глубине 5м., 4 – на глубине 7м., 5 – на глубине 15,5м.

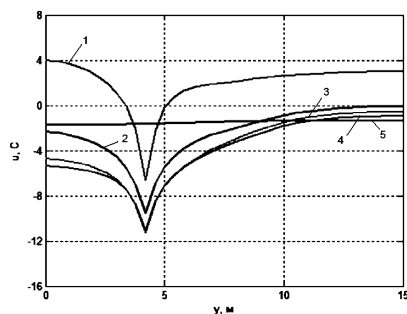


Рис.7. Зависимость температуры от координаты y в разрезе $x=1,5$ м. ($S \times 1$) в момент времени 01.10.05 1 – на глубине 1 м., 2 – на глубине 3 м., 3 – на глубине 5 м., 4 – на глубине 7 м., 5 – на глубине 15,5 м.

Момент времени 01.10.05, представленный на рис. 6, 7, выбран с целью анализа температуры после периода, когда термостабилизаторы не работают и температура достигает наибольшего значения.

Список литературы

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. - 784 с.
2. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. - М.: Изд-во МЭИ, 2003. - 312 с.
3. Крылов Д.А., Мельникова Ю.С. Математическое моделирование распределения температурных полей в криолитозоне. // Студенческий научный вестник. Сборник статей четвертой научно-технической выставки «Политехника». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. - С.94-97.
4. Сидняев Н.И., Федотов А.А., Крылов Д.А. Интегральный метод в задачах математического моделирования распределения температурных полей. Сборник докладов IV Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование» 19-22 апреля 2010 г., ФГБОУ ВПО СарФТИ НИЯУ МИФИ г. Саров, 2010, -С. 72-76.
5. Сидняев Н.И., Федотов А.А., Мельникова Ю.С. Управление распределением температурных полей в криолитозоне/ Academia. Архитектура и строительство. М.: НИИСФ РААСН, №3, 2010. –С.372-374.

РАЗВИТИЕ ЛАГРАНЖЕВЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

Н.А. Лебедева

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

При описании течений разреженных дисперсных смесей (запыленных газов, аэрозолей, пузырьковых жидкостей, разбавленных суспензий) дисперсная фаза обычно моделируется континуумом, лишенным собственных напряжений. Такой «холодный» континуум обладает повышенной сжимаемостью: в нем могут возникать локальные зоны аккумуляции частиц и области свободные от дисперсной фазы. Ключевую роль в формировании неоднородностей концентрации примеси играет инерционность частиц. Учет даже малой инерционности частиц приводит к возникновению выраженных локальных неоднородностей концентрации примеси, которые появляются вблизи кинематических особенностей поля скорости несущей фазы (критических точек, разрывов, зон локализованной завихренности и др.). В случае течения двухфазных сред с безынерционной дисперсной примесью особенностей в поле концентрации примеси не возникает, так как частицы движутся «вморожено» в жидкую среду. Однако существенные неоднородности могут возникать в поле градиента концентрации также вблизи кинематических особенностей поля скорости несущей фазы.

Для исследования эволюции полей концентрации и градиента концентрации дисперсной среды развивается подход, основанный на представлении уравнения неразрывности в лагранжевой форме и использовании дополнительных уравнений для компонент якобиана преобразования эйлеровых координат к лагранжевым. Данный подход позволяет вычислять все параметры дисперсной фазы вдоль лагранжевых траекторий движения частиц. На основании численных расчетов в течениях с гидродинамическими особенностями исследовано влияние различных межфазных сил на механизмы фокусировки частиц и структуру полей концентрации инерционной примеси, а также эволюция градиента концентрации безынерционных частиц.

Первый рассмотренный класс особенностей – это течение в окрестности критической точки, образующейся при столкновении под произвольными углами двух различных плоских стационарных вязких потоков, один из которых содержит дисперсные включения (рис. 1). Рассмотрены также предельные случаи: столкновение невязких запыленных потоков и натекание вязкого запыленного потока на твердую стенку. Расчеты показали, что на границах огибающих траекторий частиц и на контактной поверхности, разделяющей сталкивающиеся потоки, возникают зоны неограниченного роста числовой концентрации частиц.

Второй рассмотренный тип гидродинамических особенностей – зоны локализованной завихренности. Исследовано формирование зон аккумуляции частиц при их оседании под действием силы тяжести на фоне плоского

стационарного вихревого течения вблизи границы двух противоположно направленных невязких потоков (течения Кельвина типа «кошачий глаз» [1]) (рис. 2, а), а также изучена структура области накопления частиц в окрестности присоединения вязкой вихревой нити к твердой поверхности (модель «торнадо» [2]) (рис. 2, б). Расчеты показали, что в течении Кельвина быстро оседающие частицы «прошивают» цепочку вихрей и формируют пальцеобразные структуры. Зоны накопления частиц возникают на границах вихрей, а зоны свободные от частиц – в областях высокой завихренности. Медленно оседающие частицы долгое время двигаются вдоль цепочки вихрей, формируя таким образом слои высокой концентрации дисперсной фазы. В течении типа торнадо частицы собираются на расширяющейся кверху чашеобразной поверхности. Внутри этой поверхности частиц нет, а верхний край поверхности сворачивается в спираль, формируя слоистую структуру, в которой слои высокой концентрации чередуются со слоями свободными от частиц.

Еще один рассмотренный пример – напорное течение суспензии в вертикальном плоском канале при наличии гравитационного оседания частиц и оттока несущей фазы через проницаемые стенки канала. В данном случае проявляется иной механизм фокусировки частиц, обусловленный действием на частицы боковых сил в локально сдвиговом потоке. Показано, что частицы могут как мигрировать к центру канала под действием боковых сил, где будет возникать зона аккумуляции дисперсной фазы, так и выпадать на стенки слота в случае значительного оттока несущей фазы через пористые границы (рис. 3).

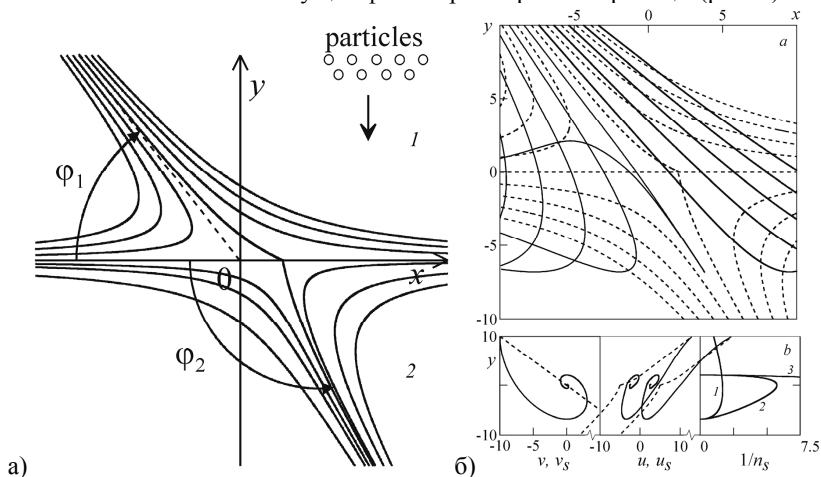


Рис. 1. Схема течения (а) и типичная картина течения в окрестности критической точки при неортогональном столкновении потоков вязкой несжимаемой жидкости в случае проникновения частиц в область встречного потока. Линии тока, профили скоростей, распределение концентрации дисперсной примеси (сплошные линии) и несущей фазы (штриховые линии).

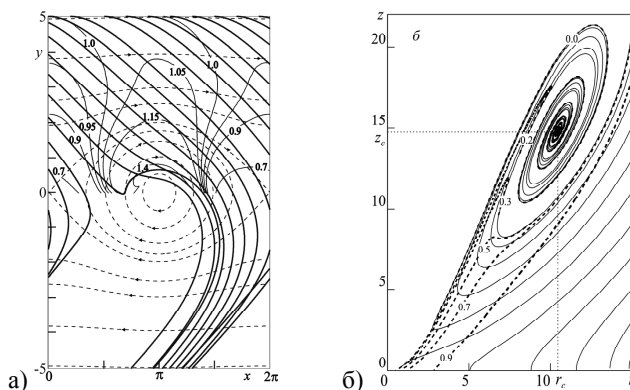


Рис. 2. (а) Пример поведения частиц в течении Кельвина: траектории частиц (сплошные линии), линии тока несущей фазы (штриховые линии) и изолинии числовой концентрации (линии с числами, равными величине обратной числовой концентрации). (б) Пример зоны накопления частиц в течении типа торнадо: сечения трубок тока дисперсной фазы (сплошные линии) и изолинии числовой концентрации частиц (линии с числами, равными величине обратной концентрации).

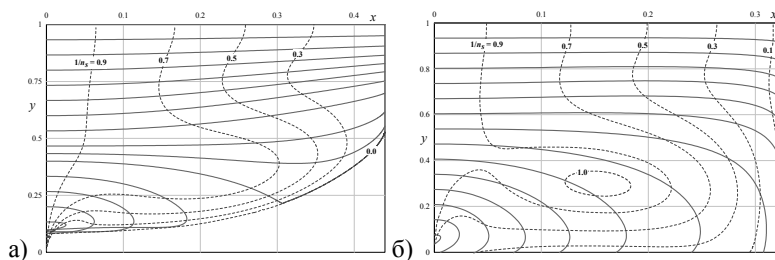


Рис. 3. Траектории частиц (сплошные линии), изолинии числовой концентрации частиц (штриховые линии с числами) для случаев миграции частиц к центру (а) и стенкам (б) канала.

Среди примеров исследования эволюции градиента концентрации безынерционной примеси рассмотрены обтекание цилиндра потоком с продольным градиентом концентрации и движение тонкого вихревого кольца в потоке с поперечным градиентом концентрации. В первом случае обнаружен существенный рост модуля градиента в окрестности точки торможения и в хвостовой области за цилиндром (рис. 4). Во втором случае установлена возможность формирования лепестковой антисимметричной структуры в поле продольной компоненты градиента концентрации (рис. 5).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00195), аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного

потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/1399) и гранта президента РФ для поддержки молодых ученых – кандидатов наук (№ МК-622.2009.1).

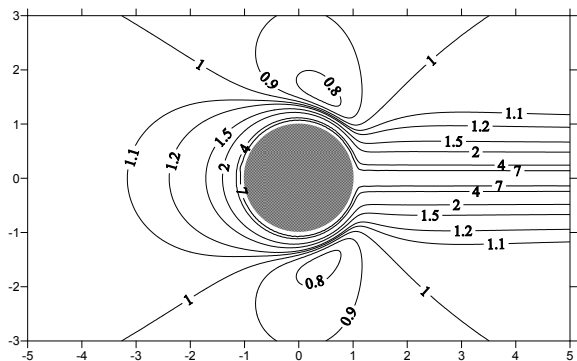


Рис. 4. Изолинии модуля градиента концентрации при обтекании цилиндра.

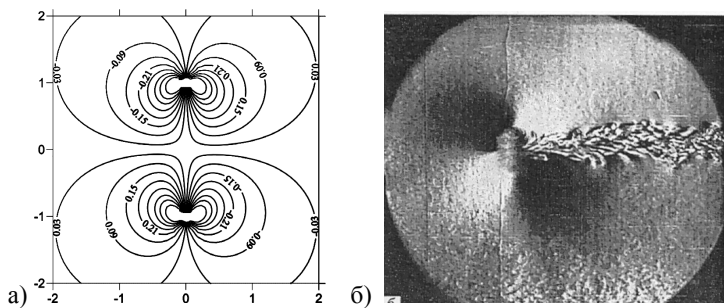


Рис. 5. Изолинии (а) и экспериментальная теневая картина из [3] (б) поля продольной компоненты градиента вблизи вихревого кольца.

Список литературы

1. Stuart J.T. On finite amplitude oscillation in laminar mixing layer.// J. Fluid Mech., 1967, v. 29, p. 417-440.
2. Гольдштик М.А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье-Стокса.// ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 610–621.
3. Прохоров В.Е. . Присоединенные возмущения вокруг вихревого кольца в стратифицированной жидкости.// Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 59-68.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУФФОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

С.А. Пославский, А.Ю. Кузнецов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Интенсивная фильтрация жидкостей через пористые среды (грунты, фильтры и т.п.) часто сопровождается структурными изменениями этих сред. Возможны два основных типа подобных процессов: вымывание твердых частиц (суффозия) и осаждение частиц твердой фазы в порах (кольматация) [1,2]. В обоих случаях происходит изменение пористости, что может оказывать существенное влияние на эволюцию фильтрационных движений, а также на механические и другие свойства самой пористой среды.

Данная работа посвящена исследованию математической модели нестационарного одномерного фильтрационного движения, сопровождающегося механической суффозией, которая обобщает модель, изучавшуюся в [1].

Предполагается, что движение неструктурных (потенциально подвижных) твердых частиц начинается тогда, когда средняя скорость жидкости u превышает некоторое критическое значение. При этом средняя скорость твердых частиц считается пропорциональной разности между скоростью жидкости и критической скоростью s с коэффициентом пропорциональности α . В рассмотренной постановке задача сводится к поиску обобщенных решений квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка, которому удовлетворяет поле скоростей жидкости (аналогичным уравнением описываются изменения концентрации твердых частиц). Используя безразмерные переменные, это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha(2u - 1 + lu^2) - I}{1 + II} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1 + lu}{1 + II} \frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

где t – время, z – пространственная координата, u – скорость течения жидкости, I – объемный расход суспензии, который считается заданной функцией времени, α и $l = (1 - \alpha)/\alpha$ – постоянные коэффициенты, $0 < \alpha \leq 1$.

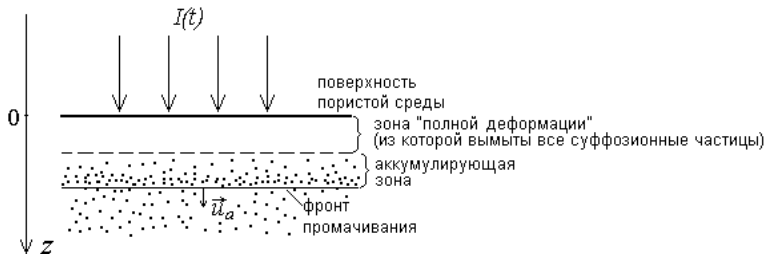


Рис.1. Движение суффозионных частиц в грунте.

Если на поверхность пористой среды поступает чистая жидкость, то при интенсивном её впитывании неструктурные твердые частицы будут вымываться, и вблизи поверхности пористой среды возможно возникновение зоны «полной деформации», свободной от суффозионных частиц [1]. В аккумулирующей зоне твердые частицы, наоборот, накапливаются. Эта зона ограничена снизу фронтом промачивания.

Решение уравнения (1) ищется в области плоскости (z, t) , ограниченной снизу кривой $z = z_a(t)$ – траекторией фронта промачивания.

Для случая постоянного объемного расхода I получены и исследованы автомодельные решения. Для случая переменного объемного расхода жидкости $I(t)$ найдено решение задачи в аналитическом виде. Характерной особенностью этих решений является присутствие в них сильных разрывов в распределениях концентрации частиц и скорости жидкости, а также (при достаточно большом расходе I) – наличие зон, из которых неструктурные твердые частицы полностью вымыты.

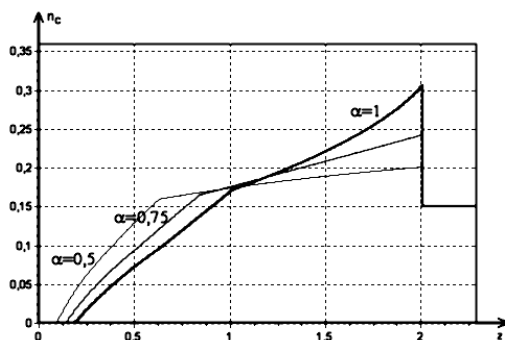


Рис.2. Графики зависимости концентрации суффозионных частиц n_c от координаты z при различных значениях коэффициента α для момента $t_1 = 1,26$. Объемный расход суспензии $I(t) = 0,8 + 0,5 t$.

На рис. 2 показан характерный график распределения концентрации неструктурных частиц для случая, когда их начальная объемная концентрация равна 0,15, а объемная концентрация структурных частиц равна 0,5.

Список литературы

1. Поляков В.Л. Промачивание суффозионных грунтов. 1. Суффозия // Прикладна гідромеханіка, 2003, Т. 5 (77), № 3. - С. 72-82.
2. Леонтьев Н.Е. О структуре фронта пористости при движении суспензии в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. - 2006. - № 5. - С. 73-76.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРКОЛЯЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ДЕФОРМАЦИЙ ДВУХФАЗНОГО ВЕЩЕСТВА

Н.И. Сидняев

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Поведение многофазных веществ в полутвердом состоянии достаточно сильно зависит от вида остаточного напряжения и от морфологии фазы, которая может изменяться от дендритной до зернистой [1-3]. В данной работе представлена математическая модель перколяционного механизма трансформации полутвердого материала в процессе осадки.

Сверхпластичность пористой структуры имеет способность к большим равномерным пластическим деформациям без нарушения внутренней сплошности, появляющаяся при высоких гомологических температурах под влиянием низких, сильно зависящих от скорости деформации напряжений [3].

Для анализа твердой фазы пластического материала, общее напряжение σ_{Tij} , действующее на вещество, может быть получено из уравнения равновесия силы. Фактическая сила $\sigma_{Tij}A_T$, действующая на многофазное вещество, состоит из силы в твердой фазе $\sigma_{Sij}A_S$ и силы в жидкой фазе pA_L :

$$\sigma_{Tij}A_T = \sigma_{Sij}A_S + \delta_{ij}pA_L, \quad (1)$$

$$\sigma_{Tij} = \sigma_{Sij} \frac{A_S}{A_T} + \delta_{ij} \frac{A_L}{A_T} = \sigma_{Sij}f_S + \delta_{ij}pf_L, \quad (2)$$

где относительную сплошность f_S многофазного вещества можно рассматривать как относительную плотность ρ пористого материала, σ_{Sij} - напряжение твердой фазы; σ_{Tij} - напряжение пластической фазы, δ_{ij} - элемент напряжения. Здесь A_L - поверхность жидкой фазы в полутвердом материале, A_S - поверхность твердой фазы в полутвердом материале, A_T - поверхность пластического материала, p - давление, действующее на жидкую фазу [2]. Относительную плотность можно представить в виде:

$$\rho = \frac{V_P}{V_P + V_S} = \frac{V_{solid}}{V_{solid} + V_{liquid}} = f_S. \quad (3)$$

Здесь V_P — объем пластического материала; V_{liquid} — объем жидкой фазы, V_{solid} — объем твердой фазы. Для пластической деформации сжимаемых материалов в работе использована функция текучести F :

$$F = [3(J_1^2 + B'J_2')]^{1/2} = C\bar{\sigma}_0, \quad (4)$$

$$A = 1/27f^2, \quad B = 1, \quad C = f = (f_S)^k, \quad f = \frac{1}{2.49(1-f_S)^{0.514}}, \quad k = 2.5.$$

Здесь J_1 - линейный инвариант напряжения, J_2' - инвариант девиаторного напряжения, B' - вклад пластической деформации в инвариант девиаторного напряжения, k — предел текучести при сдвиге.

Если в уравнениях (4) $\bar{\sigma}_0$ начальное напряжение заменить на эффективное напряжение $\bar{\sigma}$, действующее на твердую область, то для определения потенциала пластической деформации G сжимаемого материала уравнения (4) примут следующий вид:

$$G = \frac{1}{f} \left[3(J_1^2 + B'J_2') \right]^{\frac{1}{2}} \bar{\sigma}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_s &= -f_s \dot{\varepsilon}_{kk}, & \varepsilon_v &= 3\sigma_m(1-\nu) \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma}, \\ \dot{W} &= f_s \bar{\sigma} \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения между напряжениями и скоростями деформации для двумерной задачи имеют вид:

$$\sigma_x = f_s^{2k-1} \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_x + \left(f^2 - \frac{2}{9} \right) \dot{\varepsilon}_v \right], \quad (7)$$

$$\sigma_y = f_s^{2k-1} \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_y + \left(f^2 - \frac{2}{9} \right) \dot{\varepsilon}_v \right], \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = f_s^{2k-1} \dot{\gamma}_{xy} \frac{\bar{\sigma}}{3\varepsilon}, \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{2}{3} \frac{\sigma_m \dot{\lambda}}{f^2}. \quad (10)$$

Уравнение непрерывности:

$$\bar{\nabla} \bar{U}_s + \bar{\nabla} (f_L \bar{U}_L) = 0, \quad \bar{U}_L = u_L \bar{i} + v_L \bar{j}; \quad \bar{\nabla} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (11)$$

$$u_L f_L = \frac{k}{\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_L f_L = \frac{k}{\mu_L} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (12)$$

Граничные условия:

$$p = p_0 \text{ - свободная поверхность,} \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = 0 \text{ - контакт с поверхностью,} \quad (14)$$

где $\bar{n}$ - вектор нормали к поверхности, μ_L — вязкость жидкой фазы.

Подставим уравнения (12) в уравнение (11), получим:

$$\bar{\nabla} \bar{U}_s + \bar{\nabla} \left(\frac{k}{\mu_L} \bar{\nabla} p \right) = 0. \quad (15)$$

Вязкопластическая деформация твердой фазы и жидкого потока описывается моделью:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{ij} + \delta_{ij} f_s p) = 0, \quad v_i = \bar{v}_i, \quad (16)$$

$$\left(\sigma_{ij} + \delta_{ij} \frac{k}{\mu_L} p \right) n_j = t_i. \quad (17)$$

$$\sigma_{ij} = f_s^{2k-1} \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left(f^2 - \frac{2}{9} \right) \dot{\varepsilon} \right], \quad (18)$$

$$\bar{\varepsilon} = f_s^{k-1} \left[\frac{2}{9} \left[\left(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y \right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z \right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \left(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2 \right) + \left(f \dot{\varepsilon}_v \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z$ - скорости деформаций по соответствующим осям, $\dot{\varepsilon}_v$ - скорость объемной деформации, $\dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}$ - соответствующие показатели сдвига.

Уравнение скорости деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (20)$$

Функционал Π_{sol} для сжимаемого вязкопластического материала может быть получен методом Галеркина из уравнения (16) с использованием выражения вида:

$$\int_V v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} + a \delta_{ij} p) dV = 0, \quad a = f_s. \quad (21)$$

Используя формулу Грина, уравнение (21) можно представить в виде:

$$\int_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV + \int_V a \delta_{ij} p \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV - \int_S (\sigma_{ij} + a \delta_{ij} p) v_i n_j dS = 0. \quad (22)$$

Учитывая, что вариация δ скоростей по заданному объему равна нулю, получим формулу:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V a \delta_{ij} p \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{S_F} \bar{t}_i \delta v_i dS_F = 0, \quad (23)$$

тогда функционал Π_{sol} и соответствующие вариации примут вид:

$$\Pi_{\text{sol}} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V a \delta_{ij} p \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{S_F} \bar{t}_i v_i dS_F. \quad (24)$$

$$\delta \Pi_{\text{sol}} = \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V a \delta_{ij} p \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{S_F} \bar{t}_i \delta v_i dS_F. \quad (25)$$

Здесь $\bar{t}_i$ — сила поверхностного натяжения. Количество жидкой фазы, проходящего через пористые участки определяется с использованием закона Дарси (16):

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{k}{\mu_L} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu_L} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (26)$$

Если в качестве функции веса выбрать давление жидкости p , то может быть использована формула:

$$\int_V p \left[\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{k}{\mu_L} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu_L} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] dV = 0. \quad (27)$$

После интегрирования по частям (27) и применения теоремы Остроградского-Гаусса уравнение может быть представлено:

$$\int_V \left[\frac{\partial p}{\partial x} u_s + \frac{\partial p}{\partial y} v_s \right] dV + \int_V \frac{k}{\mu_L} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right] dV = \int_V p Q_L dV, \quad (28)$$

где Q_L - массовый расход жидкой фазы.

Конечный вид функционала для жидкой фазы имеет вид:

$$\Pi_{\text{liq}} = \int_V \left[\frac{\partial p}{\partial x} u_s + \frac{\partial p}{\partial y} v_s \right] dV + \int_V \frac{k}{\mu_L} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right] dV - \int_V p Q_L dV \quad (29)$$

Вариация уравнения (29) для гидростатического давления в жидкости приводит к следующему уравнению:

$$\delta \Pi_{\text{liq}} = \int_V \left[\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} u_s + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} v_s \right] dV + \int_V \frac{k}{\mu_L} \left[\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right] dV - \int_V (\delta p) Q_L dV \quad (30)$$

Дискретная форма уравнений конечных элементов для пластической деформации имеют вид:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \bar{\sigma} \hat{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\delta \hat{v}) dV, \quad (31)$$

$$\int_V a \delta_{ij} p \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \mathbf{H} \hat{p} (\delta \hat{v}) dV, \quad \mathbf{H}_{2i-1,j} = a \frac{\partial q_i}{\partial x} q_j, \quad (32)$$

$$\mathbf{H}_{2i,j} = a \frac{\partial q_i}{\partial y} q_j, \quad i, j = \overline{1:4} \quad (33)$$

$$\int_{S_F} \bar{t}_i \delta v_i dS_F = \int_{S_F} \bar{t}^T N (\delta \hat{v}) dS_F, \quad (34)$$

где матрица $\mathbf{D}$ равна:

$$\mathbf{D} = f_S^{2k-1} \begin{bmatrix} f^2 + \frac{4}{9} & f^2 - \frac{2}{9} & f^2 - \frac{2}{9} & 0 \\ f^2 - \frac{2}{9} & f^2 + \frac{4}{9} & f^2 - \frac{2}{9} & 0 \\ f^2 - \frac{2}{9} & f^2 - \frac{2}{9} & f^2 + \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Общая дискретная форма уравнения (25) может быть представлена:

$$\delta \Pi_{\text{sol}} = \left[\int_V \bar{\sigma} \hat{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV + \int_V \mathbf{H} \hat{p} dV - \int_{S_F} \bar{t}^T N dS_F \right] (\delta \hat{v}) = 0, \quad (36)$$

где:

$$\Phi_{\text{sol}}(\hat{v}, \hat{p}) = \int_V \bar{\sigma} \hat{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV + \int_V \mathbf{H} \hat{p} dV - \int_{S_F} \bar{t}^T N dS_F = 0. \quad (37)$$

Граничное условие между поверхностью и пластическим материалом, имеет вид:

$$f_{\text{inc}} = -m_f k \left[\frac{2}{\pi \tan \left(\frac{|v_r|}{\alpha} \right)} \right] \frac{v_r}{|v_r|}, \quad (38)$$

здесь v_r - относительная скорость между контактной поверхностью и пластическим материалом, m_f — коэффициент трения, α - единица измерения скорости.

Уравнение (30) в дискретной форме с учетом функции формы примет вид:

$$\delta \Pi_{\text{liq}} = \int_V \left[\frac{\partial q_i}{\partial x} q_j u_j + \frac{\partial q_i}{\partial y} q_j v_j \right] dV(\hat{\Phi}_i) + \int_V \frac{k}{\mu_L} \left[\frac{\partial q_i}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial q_j}{\partial y} \right] dV(\hat{\Phi}_i) - \int_V q_i Q_i dV(\hat{\Phi}_i) = 0 \quad (39)$$

Уравнение (39) согласно произвольности вариаций:

$$\Phi_{\text{liq}}(\hat{v}, \hat{p}) = \int_V L dV \hat{v} + \int_V K dV \hat{p} - \int_V M dV = 0, \quad (40)$$

где K , L и M :

$$L_{i,2j-1} = \frac{\partial q_i}{\partial x} q_j, \quad L_{i,2j} = \frac{\partial q_i}{\partial y} q_j; \quad K_{i,j} = \frac{k}{\mu_L} \left[\frac{\partial q_i}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial q_j}{\partial y} \right], \quad M_i = q_i Q_i; \quad i, j = \overline{1,4}.$$

Уравнение пластичности для полутвердого материала, полученное из уравнений (37) и (40), примет вид:

$$\begin{bmatrix} [K_s(U_s)] & [H] \\ [L] & [K_L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (U_s) \\ (p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_p \end{bmatrix}.$$

Величина коэффициента начальной проницаемости для твердых частиц, имеющих сферическую форму определяется по формуле:

$$\kappa_0 = \frac{R}{18} \left(3 + \frac{4}{1-f_L} - 3 \sqrt{\frac{8}{1-f_L} - 3} \right),$$

где R - средний радиус твердых частиц.

При изучении механизма и кинетики процессов, происходящих в пластическом пористом теле, необходимо иметь в виду особенности фазового равновесия, поскольку фазы вещества имеют такие размеры, когда эффекты, обусловленные искривленностью границы между сосуществующими фазами, могут оказаться значительными. Точность окончательных результатов решения зависит от точности описания свойств материала, граничных и начальных условий, а также систем уравнений, описывающих рассматриваемый процесс. Отказ от аксиом статики в пользу общих энергетических принципов, переход к описанию движения в новой шкале средних напряжений имеет ряд преимуществ, позволяющих снизить математические трудности решения практических задач и предложить новые механизмы процессов, сопровождающих пластическую деформацию.

Список литературы

1. Алюшин Ю.А., Еленев С.А., Кузнецов С.А. и др. Энергетическая модель обратимых и необратимых деформаций/—М.: Машиностроение, 1995. — 125 с.
2. Сидняев Н.И., Бочков А.В. О физических особенностях процесса дегазации наноматериалов/ Нанотехнологии и наноматериалы для промышленности: Сборник трудов Харьковской нанотехнологической Ассамблеи —Харьков.: ХФТИ, 2006. С. 243-253.
3. Сидняев Н.И. Численное моделирование получения проницаемых порошковых материалов формирующихся при спекании /Механика композиционных материалов и конструкций.-2004, т.10, №1, с.93-107.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ДВУХФАЗНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ

Н.И. Сидняев, И.Б. Бахолдин, Ю.С. Мельникова
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В качестве объекта исследования рассматривается двухфазная грунтовая среда, содержащая воду и лед, температурные поля в которой могут проходить границу в 0°C , то есть влага в грунте претерпевает фазовые превращения. С этими фазовыми переходами связаны выделение и поглощение большого количества тепла, которые существенно влияют на температурное поле рассматриваемой среды и ее динамику. На границах расчетного объема могут быть заданы различные граничные условия: первого, второго или третьего типов. Кроме этого, рассматриваются грунтовые среды с внедренными в них специальными устройствами управления температурными полями – термостабилизаторами, которые будут позиционироваться как дополнительные источники тепла.

Базовым уравнением для разработки методов прогноза процессов замерзания и таяния в грунтах является уравнение баланса тепла в интегральной форме [1-2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V H dv = - \iint_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma + \iiint_V F dv. \quad (1)$$

Здесь V - контрольный объем, Σ - окружающая его поверхность, t - время, $H=H(u)$ - энтальпия (внутренняя энергия) на единицу объема, u - температура, $\vec{q}$ - вектор потока тепла, λ - коэффициент теплопроводности, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к рассматриваемому объему, F - приток тепла на единицу объема. В грунте поток тепла $\vec{q}$ определяется по закону Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \text{ grad } u, \quad (2)$$

λ - коэффициент теплопроводности. Фазовые переходы (фронты замерзания) и скачки коэффициентов теплопроводности на границах грунтов различного типа или элементов строительных конструкций порождают разрывы в решениях [3-4]. При отсутствии таких разрывов на основе уравнений (1) и (2) выводится уравнение распространения тепла в дифференциальной форме:

$$c_v \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} u \right) + F(x, y, z) \quad (3)$$

Здесь $c_v = dH / du = \rho c$ - объемный коэффициент теплопроводности, c - удельная теплоемкость, ρ - плотность, λ - коэффициент теплопроводности, $u(x, y, z, t)$ - температура среды. Здесь считается, что в случае наличия фазового перехода, где энтальпия терпит скачок, объемный коэффициент теплопроводности имеет вид

$$c_v = \rho c + Q \delta(u - u^*),$$

u^* - температура фазового перехода, Q - теплота фазового перехода, $\delta(u-u^*)$ - дельта-функция.

В случае, когда коэффициент теплопроводности постоянная величина, из уравнения (3) выводится уравнение теплопроводности:

$$\frac{c_v}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u + \frac{F(x, y, z)}{\lambda}. \quad (4)$$

На разрывах ставятся некоторые граничные условия, выводимые из (1) и (2). Для фазовых переходов граничные условия следующие [1,3-5]:

$$U(H_2 - H_1) = \lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{s}} u \right)_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{s}} u \right)_1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0. \quad (5)$$

Здесь U – скорость распространения поверхности разрыва в направлении ее нормали $\vec{s}$, индексы 1 и 2 обозначают значения соответствующих величин по разные стороны разрыва, нормаль $\vec{s}$ направлена от области 1 к области 2. Предполагается, что на таком разрыве терпит скачок величина энтальпии при $u = 0$ в связи с наличием теплоты фазового перехода.

Для неподвижных разрывов, связанных со скачком коэффициента теплопроводности на границе раздела двух разных сред граничные условия следующие [5]:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{s}} u \right)_1 - \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{s}} u \right)_2 = 0, \quad u_1 = u_2, \quad (6)$$

На границе расчетного объема ставятся три типа граничных условий – первого, второго и третьего рода соответственно:

$$u = \mu(t) \quad (7)$$

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial n} u = \nu(t) \quad (8)$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial n} u = -\sigma(u - \mu(t)) \quad (9)$$

При разработке численного решения принимается, что расчетная ячейка имеет вид параллелепипеда. Узлы сетки, соответствующие вершинам параллелепипеда обозначаются целыми числами. Значения температуры, коэффициентов теплопроводности, теплоемкости относятся к серединам расчетных ячеек, эти узлы обозначаются полуцелыми индексами. В них задаются координаты x_i, y_i, z_i , шаги сетки $h_{x\ i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $h_{y\ j+1/2} = y_{j+1} - y_j$, $h_{z\ k+1/2} = z_{k+1} - z_k$. После применения уравнения (1) к расчетной ячейке и деления получившегося соотношения на $h_{xi} h_{yi} h_{zi} \tau$ получается шаблон для численной схемы:

$$\begin{aligned} & (H_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n) / \Delta t = \\ & = [(q_{i+1, j+1/2, k+1/2} - q_{i, j+1/2, k+1/2}) / h_{x+1/2i} + \\ & + (q_{i+1/2, j+1, k+1/2} - q_{i+1/2, j, k+1/2}) / h_{y+1/2j} + \\ & + (q_{i+1/2, j+1/2, k+1} - q_{i+1/2, j+1/2, k}) / h_{z+1/2k}] + F_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

Потоки вычисляются путем аппроксимации закона Фурье:

$$q_{i, j+1/2, k+1/2} = \lambda_{i, j+1/2, k+1/2} (u_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} - u_{i-1/2, j+1/2, k+1/2}) / h_i, \quad h_i = (h_{i+1/2} + h_{i-1/2}) / 2$$

Реализован способ, являющийся оптимальным способом вычисления коэффициентов теплопроводности:

$$q_{i,j+1/2,k+1/2} = 2(u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}) / \left(\frac{h_{xi+1/2,j+1/2,k+1/2}}{\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{h_{xi-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\lambda_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right). \quad (11)$$

Оптимальной эта аппроксимация является в том смысле, что условия на контактном разрыве между двумя расчетными ячейками выполняются точно, однако использование такого способа не абсолютизируется. Схемы, построенные с применением такой аппроксимации потоков, иногда называют «методом контрольного объема».

Наиболее простой способ аппроксимации граничных условий первого рода для поверхности, перпендикулярной оси x для используемой здесь численной схемы следующий:

$$u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = \mu. \quad (12)$$

Граничное условие второго рода в узле с индексом i ставится так:

$$q_{i,j+1/2,k+1/2} = \nu, \quad q_{i,j+1/2,k+1/2} = -\nu. \quad (13)$$

Однородное граничное условие второго рода в узлах с целым индексом i ставится и через температуру, посредством добавления, дополнительных краевых узлов:

$$u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = u_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}. \quad (14)$$

Граничное условие третьего рода в узле с индексом i ставится так:

$$q_{i,j+1/2,k+1/2} = 2(\mu - u_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}) \frac{2}{h_{i-1/2} / \lambda_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + 2(1/\alpha_{нов} + R_{нов})}, \quad (15)$$

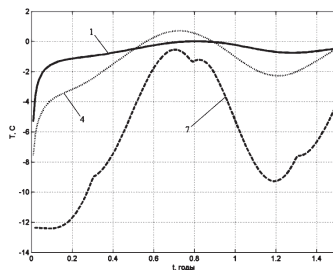
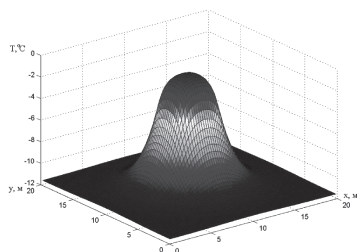
$$q_{i,j+1/2,k+1/2} = -2(\mu - u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}) \frac{2}{h_{i+1/2} / \lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + 2(1/\alpha_{нов} + R_{нов})}.$$

Здесь $R_{нов}$ - коэффициент термического сопротивления поверхности, $\alpha_{нов}$ - коэффициент конвективного теплообмена.

В качестве расчетного объема рассматривалась двухфазная грунтовая среда размером 20х20х7.5 м. Температурные показатели, необходимые для расчетов: на нижней границе задается постоянная температура -2°C, среднегодовая температура на поверхности -1°C с годовым перепадом в 40°C (таким образом, максимальная температура на поверхности 19°C, минимальная -21°C).

Для расчетов были применены несколько вариантов расчетных объемов с различными грунтами и взаимным расположением сооружений и термостабилизирующих устройств.

При этом в ходе расчетов варьировались такие параметры и характеристики термостабилизирующих устройств как их пассивность и активность, мощность и время включения (для активных термостабилизаторов). По результатам были построены разнообразные графики и разрезы полей температур (пример представлен на рисунке 1).



а)

б)

Рис. 1. Примеры графиков

а) горизонтальный разрез температур на глубине 3.1 м расчетного объема с фундаментом и четырьмя встроенными термостабилизаторами;

б) изменение температуры в точках наблюдения 1, 4, 7 в течение 1.5 лет (1, 4 и 7 – точки на глубине 3.1 м строго под зданием, на углу фундамента и в свободном грунте соответственно)

Список литературы

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. – 512 с.
3. Сидняев Н.И., Федотов А.А., Мельникова Ю.С. Численное решение уравнения переноса энергии и импульса для многофазных сред. - Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (12-13 ноября 2009 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч.2. – с. 277-281
4. Сидняев Н.И., Храпов П.В., Мельникова Ю.С. Основы математического моделирования распределения температурных полей в многофазных средах. – Материалы Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование. – Саров: Изд-во «Альфа», 2010. с. 86-93
5. Баходдин И.Б., Мельникова Ю.С. Моделирование фазовых переходов и управление температурным полем в криолитозоне. – Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов общеуниверситетской научно-технической конференции «Студенческая научная весна-2010», 1-30 апреля 2010 г, МГТУ им. Н.Э.Баумана/ Под ред. К.Е.Демихова. М.: НТА «АПФН», 2009. Т.10. Часть 1. с. 219-221

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ ПОЛЯМИ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ

Ю.С. Мельникова, Н.И. Сидняев, П.В. Храпов
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В настоящее время задачи управления распределением температурных полей в двухфазных средах чаще всего решаются эмпирическим методом. Но существуют математические методы, позволяющие рассчитывать оптимальное управление температурными полями [1, 2]. С помощью функции оптимального управления можно создавать именно те температурные условия, которые нужны в конкретном случае, максимально снизить затраты энергии на охлаждение например грунтовых сред (если необходимо привлекать внешние источники энергии), а также более разумно и полно использовать ресурсы, выделяемые на поддержание в определенной двухфазной среде необходимых условий.

Существуют различные методы определения оптимальной функции управления. Но наибольший интерес представляет задача термостатирования: необходимо за счет тех или иных тепловых воздействий удерживать заданную температуру в некоторой части расчетной области. В качестве управления могут выступать распределенные или точечные внутренние источники тепла, например, нагреватели.

В качестве модельной рассматривается задача управления температурой изотропного твёрдого тела, когда расчетная область Ω есть прямоугольная

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Стационарное поле при управлении распределенными источниками тепла определяется из уравнения

$$Lu = f(x) + v(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где

$$L = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha, \quad L_\alpha u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right). \quad (2)$$

Для простоты краевые условия первого рода имеют вид:

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Считается, что наблюдение ведется за температурой во всей расчетной области, и поэтому функционал качества естественно взять в виде [1]

$$J(v) = \int_{\Omega} (u(x; v) - \varphi(x))^2 dx, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция (желательное распределение температуры).

Вместо (4) рассматривается функционал

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} v^2(x) dx \quad (5)$$

при некотором заданном ε . Ищется минимум функционала (5), т.е.

$$J_\varepsilon(w) = \inf_{v \in H} J_\varepsilon(v), \quad (6)$$

где $H = L_2(\Omega)$ ($V = H$ - задача управления без ограничений). Функционал $J_\varepsilon(v)$ является сильно выпуклым.

Приближенное решение задачи оптимального управления (1)-(6) основывается на градиентных итерационных методах. Поэтому в таких задачах прежде всего необходимо вычислить градиент минимизируемого функционала, сформулировать необходимые условия оптимальности [1].

Условия оптимальности задачи (1)-(6) имеют вид

$$\text{grad } J_\varepsilon(w) = 0. \quad (7)$$

Для нахождения градиента функционала $J_\varepsilon(v)$ рассматривается разность

$$\delta J_\varepsilon(v) = J_\varepsilon(v + \delta v) - J_\varepsilon(v).$$

Решение задачи (1)-(3), которое соответствует правой части $v + \delta v$ через $u + \delta u$:

$$L(u + \delta u) = f(x) + v + \delta v, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$u(x) + \delta u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (9)$$

В силу линейности задач (1), (3) и (8), (9) для приращения температуры $\delta u(x)$ получается задача

$$L\delta u = \delta v(x), \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

$$\delta u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Для приращения функционала справедливо

$$\delta J_\varepsilon(v) = 2 \int_{\Omega} \delta u(u - \varphi(x)) dx + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \delta v v(x) dx + \int_{\Omega} (\delta u)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\delta v)^2 dx. \quad (12)$$

Для получения из (12) выражения для градиента вводится функция $p(x)$, удовлетворяющая сопряженному уравнению с однородными граничными условиями первого рода, для которой верно равенство

$$(L\delta u, p) = (\delta u, Lp).$$

Принимая во внимание вид первого слагаемого в правой части (12), $p(x)$ определяется как решение следующей краевой задачи

$$Lp = u(x) - \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$p(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (14)$$

В итоге выражение для градиента функционала (4), (5) выглядит так:

$$\text{grad } J_\varepsilon(v) = 2 \left(p(x) + \frac{1}{\varepsilon^2} v(x) \right).$$

Необходимое и достаточное условие (7) минимума функционала приводит к равенству

$$p(x) + \frac{1}{\varepsilon^2} v(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (15)$$

Здесь сопряженное состояние определяется из уравнения (13) и граничного условия (14). Кроме того, справедливо уравнение

$$Lu = f(x) + w(x), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

дополненное граничным условием (3).

Тем самым, оптимальное управление находится из решения системы уравнений (13), (16) с условиями (3), (14) на основе равенства (15).

Исключая $u(x)$ с помощью уравнения (13) и принимая во внимание (15), из (16) получается эллиптическое уравнение четвертого порядка для $p(x)$:

$$L^2 p + \varepsilon^2 p = f(x) - L\varphi, \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

Это уравнение дополняется граничными условиями (13) и

$$Lp = g(x) - \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (18)$$

На основе (15) аналогично (14), (17), (18) формулируется краевая задача для управления:

$$L^2 w + \varepsilon^2 w = \varepsilon^2 (L\varphi - f(x)), \quad x \in \Omega, \quad (19)$$

$$Lw = \varepsilon^2 (\varphi(x) - g(x)), \quad x \in \partial\Omega, \quad (20)$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (21)$$

На основе краевой задачи (19)-(21), содержащей параметр ε , строится вычислительный алгоритм решения задачи оптимального управления.

Также следует рассмотреть дискретный аналог задачи оптимального управления (1)-(6). В прямоугольнике Ω вводится обычная равномерная сетка

$$\bar{\omega} = \{x | x = x_{ij} = (ih_1, jh_2), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

причем ω - множество внутренних, а $\partial\omega$ - множество граничных узлов.

Краевой задаче (1)-(3) ставится в соответствие разностная задача

$$\Delta u = f(x) + v(x), \quad x \in \omega \quad (22)$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\omega \quad (23)$$

где с учетом (2)

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha u, \quad \Lambda_\alpha u = -(a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}. \quad (24)$$

Для определенности считается, что для достаточно гладкого коэффициента теплопроводности

$$a_1(x_1, x_2) = k(x_1 - 0.5h_1, x_2), \quad a_2(x_1, x_2) = k(x_1, x_2 - 0.5h_2).$$

Наблюдение ведется за температурой внутри области Ω , поэтому функционал качества (4), (5) аппроксимируется следующим образом

$$J_\varepsilon(v) = \|u(x; v) - \varphi(x)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|v\|^2, \quad (25)$$

где теперь $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ - скалярное произведение и норма в сеточном гильбертовом пространстве $H = L_2(\omega)$, причем

$$(v, w) = \sum_{x \in \omega} v(x)w(x)h_1h_2.$$

Оптимальное управление $w(x)$, $x \in H$ определяется из условия

$$J_\varepsilon(w) = \inf_{v \in H} J_\varepsilon(v). \quad (26)$$

Условия минимума в задаче (22)-(26) формулируются аналогично непрерывному случаю. Для градиента разностного функционала (25) справедливо:

$$\text{grad } J_\varepsilon(v) = 2 \left(p(x) + \frac{1}{\varepsilon^2} v(x) \right),$$

где $p(x)$ определяется как решение сеточной задачи

$$\Delta p(x) = u(x) - \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad (27)$$

$$p(x) = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (28)$$

Оптимальное управление и $p(x)$ связаны соотношением

$$p(x) + \frac{1}{\varepsilon^2} w(x) = 0, \quad x \in \omega. \quad (29)$$

Таким образом, разностный аналог краевой задачи (19)-(21) выглядит так:

$$\Delta^2 w + \varepsilon^2 w = \varepsilon^2 (\Lambda \varphi - f(x)), \quad x \in \omega, \quad (30)$$

$$\Lambda w = \varepsilon^2 (\varphi(x) - g(x)), \quad x \in \partial\omega, \quad (31)$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (32)$$

Разностная задача (30)-(32) для оптимального управления решается на основе различных методов решения сеточных уравнений.

В работе кратко представлены градиентные методы итерационного решения вариационных задач, на основе которых строятся численные методы решения задач управления. Выделены классы задач управления распределенными источниками тепла в стационарной и нестационарной постановках при различных критериях (функционалах) качества.

Список литературы

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Эдиториал УРСС, 2009. – 784 с.
2. Сидняев Н.И., Федотов А.А., Мельникова Ю.С. Управление распределением температурных полей в криолитозоне. – Academia. Архитектура и строительство. М.: НИИСФ РААСН, 2010. с. 372-374

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ГРУНТОВ ВОКРУГ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ В КРИОЛИТОЗОНЕ В УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОГО ПОТЕПЛЕНИЯ

Федотов А.А., Григорьев В.Ю., Лонкин П.В., Храпов П.В.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Согласно метеорологическим наблюдениям по данным Межправительственной группы экспертов по изменению климата [1] с 1980 года средняя температура на планете поднялась на 0.5 градуса Цельсия, и Земля продолжает нагреваться примерно на 0.16 градуса за десятилетие. Увеличение среднегодовой температуры атмосферы в свою очередь ведет к увеличению температуры грунта. На температуру грунта влияют также и промышленные объекты, построенные на нем [2-4]. Исследованию влияния этих факторов на температурный режим грунтовой области в криолитозоне и посвящена данная работа.

Численный расчет проводится в ограниченной области D – прямоугольном параллелепипеде размером $21 \times 15 \times 17$ м. Верхняя граница области D представляет собой плоскость, разделенная на 3 зоны (рис.1): зона с

естественными условиями теплообмена, зона снежных надувов, здание. При расчете боковые грани области D теплоизолированы, а на нижней границе задается тепловой поток из недр Земли, который принят равным 50 мВт/м^2 [5].

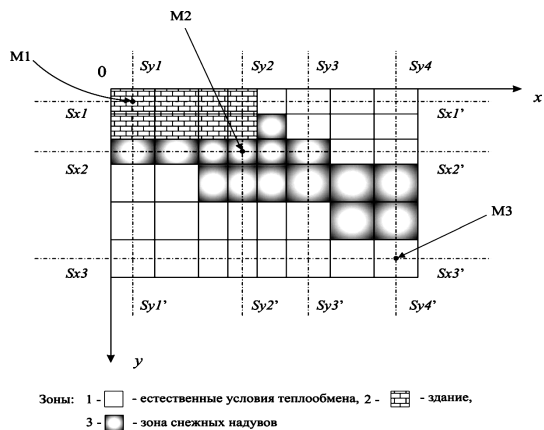


Рис.1

В результате расчетов получены зависимости температуры от времени в точках наблюдения M3 и M1 (рис.1) для следующих глубин: 1 м, 3 м, 5 м, 7 м, 15.5 м.

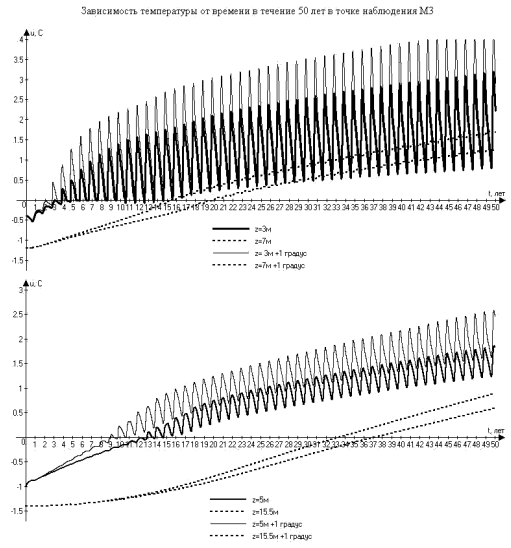


Рис.2

Так как при изменении температуры на 0.1°C изменения в результатах несущественны, то был рассмотрен случай повышения температуры на 1°C . Как видно из графиков (рис.2) повышение температуры окружающей среды на 1°C приводит к повышению температуры грунта. На глубине 5 м температура грунта становится положительной примерно через 14-15 лет, а при потеплении через 9-15 лет. Аналогично и на глубине до 7 м. Без потепления – через 20-21 года, а с потеплением - через 15-16 лет. То есть деградация грунта при повышении температуры окружающей среды на 1°C происходит на 5-6 лет раньше, что сокращает срок эксплуатации промышленного объекта в данных условиях.

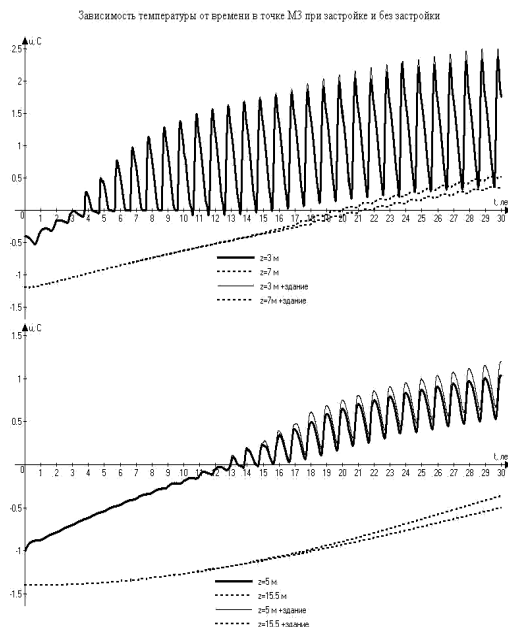


Рис.3

Рассмотрим влияние здания на температуру грунта. Как видно из графиков (рис.3), в точке МЗ первые 19-20 лет влияния здания на температуру вечномёрзлых грунтов нет. Это свидетельствуют полностью совпавшие графики для всех глубин (3м, 5м, 7м, 15.5м). Но по прошествии 20 лет графики, пусть несущественно, но расходятся.

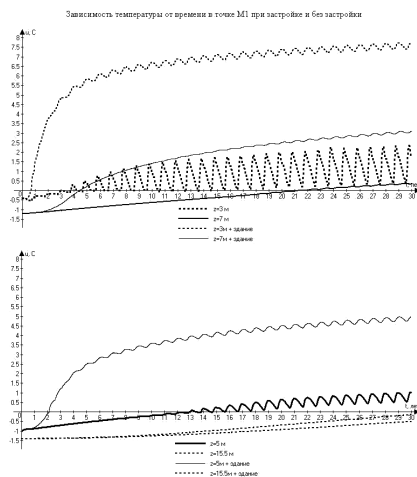


Рис.4

Для случая со зданием температура грунта начинает расти быстрее, чем для случая, когда здания нет. То есть влияние здания сказывается только по прошествии 15-20 лет. Из этого можно сделать вывод, что прогноз температуры грунта нужно делать на больший срок, чем 20 лет, иначе это может привести к повышенному риску разрушения промышленного объекта. В отличие от расчета для точки МЗ, в точке М1 (рис.4), в непосредственной близости от здания, влияние здания происходит значительно быстрее. Уже через полгода температура на трехметровой глубине достигает положительных значений, на глубине 5 м – через 2 года.

Список литературы

1. МГЭИК, 2007: Изменение климата, 2007 г.: Обобщающий доклад. Вклад рабочих групп I, II и III в Четвертый доклад об оценке Межправительственной группы экспертов по изменению климата [Пачаури, Р.К., Райзингер и др.]. МГЭИК, Женева, Швейцария, 104 стр.
2. Хрусталева Л.Н. , Давыдова И.В. . Прогноз потепления климата и его учет при оценке надежности оснований зданий на вечномёрзлых грунтах // Научный журнал «Криосфера Земли» - 2007. Т.11 Вып.2 С.68-75
3. Попов А.П. , Милованов В.И. , Жмулин В.В. и др. К вопросу о типовых технических решениях по основаниям и фундаментам для криолитозоны. // Журнал «Инженерная Геология» - 2008. Т.3000. С.22-38
4. Хрусталева Л.Н. Основы геотехники в криолитозоне. М.: Изд-во МГУ. 2005. 544с.
5. Коронковский Н.В. Общая геология. М.: Изд-во КДУ. 2006. 528с.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ НАДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ НА ВЕЧНОМЕРЗЛЫХ ГРУНТАХ

Л.Н. Хрусталеv

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Предполагается, что трубопровод прокладывается на свайном основании на вечноммерзлых грунтах сливающегося типа и силами пучения можно пренебречь, ввиду их малости. Для этого случая задача оценки надежности свайного основания формулируется следующим образом:

$$P(t) = P \left\{ \begin{array}{l} F_u(\tau) \geq F_v(\tau), \\ Y_0(\tau) \leq Y_u, \\ 0 \leq \tau \leq t \end{array} \right\} \quad (1)$$

где $P(t)$ – функция надежности свайного основания, б.р; F_u – несущая способность основания, н; F_v – вертикальная нагрузка, передаваемая на основание, н; Y_0 – горизонтальное перемещение головы сваи под действием горизонтальной нагрузки, м; Y_u – предельно допустимое горизонтальное перемещение головы сваи, определяемое прочностью материала, м; t – текущее время, ч.

При этом под надежностью P понимается значение функции надежности на фиксированный момент времени равный периоду эксплуатации t_3 , т.е. $P = P(t_3)$.

В вероятностной постановке первое условие в выражении (1) запишется:

$$F_u^* + \varphi(t) \geq F_v^* + \eta(t), \quad (2)$$

где F_u^* , F_v^* – математическое ожидание несущей способности основания и вертикальной нагрузки на основание; $\varphi(t)$, $\eta(t)$ – стационарные нормальные случайные процессы с математическим ожиданием равным нулю.

Установлено, что для магистральных трубопроводов $\eta(t)/F_v = 0.01 - 0.02$, поэтому процессом $\eta(t)$ пренебрегаем.

Поделив правую и левую часть (2) на среднее квадратичное отклонение σ_φ процесса $\varphi(t)$ получим: $-\frac{\varphi(t)}{\sigma_\varphi} = \frac{F_u^* - F_v^*}{\sigma_\varphi}$ или

$$\psi(t) \leq \gamma_v, \quad (3)$$

где γ_v – характеристика безопасности при вертикальной нагрузке, вычисляемая по формуле (4).

Формулу (4) получаем, умножая и деля правую часть выражения (3) на F_u^* .

$$\gamma_v = \frac{F_u^* - F_v^*}{\sigma_\varphi} \cdot \frac{F_v^*}{F_u^*} = \frac{1 - \frac{F_v^*}{F_u^*}}{v_{F_u}}, \quad (4)$$

где $K_H = \frac{F_u^*}{F_v^*}$ – коэффициент надежности основания, б.р; $v_{F_u} = \frac{\sigma_\varphi}{F_u^*}$ – коэффициент

вариации несущей способности основания, б.р.

Для висячей сваи, пренебрегая несущей способностью ее торца, что идет в запас расчета, несущую способность сваи можно вычислить по следующей формуле:

$$F_u^* = A \cdot R_{af}, \quad (5)$$

где A – площадь боковой поверхности сваи в вечномерзлом грунте; R_{af} – расчетное сопротивление мерзлых грунтов и грунтовых растворов сдвигу по поверхности смерзания в Па, определяется по таблице 3 Приложения 2 СНиП 2.02.04-88, а для известково-песчаных растворов может быть вычислена по формуле (6), аппроксимирующей данные этой таблицы:

$$R_{af} = k \cdot (0.27 + 1.5 \cdot \sqrt{-T}) \cdot 10^5, \quad (6)$$

где k – коэффициент, учитывающий шероховатость боковой поверхности сваи, принимается, равным 0.7 для металлических свай и 1.0 для железобетонных; T – эквивалентная температура грунта, $^{\circ}\text{C}$.

Далее определим число выбросов из области допустимых состояний, обусловленных вертикальной нагрузкой, применяя к ним распределение Пуассона. Это обоснованно, поскольку нас интересуют только высоконадежные системы, для которых выбросы являются редкими событиями и их математическое ожидание в году определяется по формуле:

$$m(\gamma_v) = \frac{\exp(-0.5\gamma_v^2)}{\gamma_v \sqrt{2\pi}}, \quad (7)$$

Для вычисления $m(\gamma_v)$ по формуле (7) надо предварительно вычислить по формуле (4) характеристику безопасности γ_v и по формуле (8), вывод которой сделан Г.П. Пустовойтом [Хрусталева, Пустовойт, 1988], коэффициент вариации несущей способности основания.

$$\nu_{Fu} = \frac{0.9 \cdot (-T_0 / A)^{1/5} \cdot \sigma \cdot D}{-2 \cdot T - 0.47 \cdot \sqrt{-T}}, \quad (8)$$

где T_0 – температура грунта на глубине годовых теплооборотов в естественных условиях, $^{\circ}\text{C}$; A – амплитуда сезонных колебаний наружного воздуха (деленная на два разницы среднемесячных температур наружного воздуха между самым теплым и самым холодным месяцем года, обычно $A=15-30$ $^{\circ}\text{C}$), $^{\circ}\text{C}$; σ – среднее квадратичное отклонение средней годовой температуры наружного воздуха, обычно $\sigma = 0.7-1.6$ $^{\circ}\text{C}$; D – коэффициент затухания температурной дисперсии с глубиной, зависит от типа фундамента и параметра: $y = 0.019 \cdot z \cdot \sqrt{C_f / \lambda_f}$ (z – глубина заложения фундамента, считая от верхней границы вечномерзлых грунтов, м; C_f – теплоемкость мерзлого грунта, Вт.ч/(м ^{3} . $^{\circ}\text{C}$); λ_f – теплопроводность мерзлого грунта, Вт/(м. $^{\circ}\text{C}$)).

Формулы для определения T и D

$$T = \alpha \cdot T_0, \quad (9)$$

$$\alpha = 0.44 \cdot \sqrt{y}, \quad (10)$$

$$D = \begin{cases} [0.78 + 0.74 \cdot \ln(y)] / y & \text{при } y > 1 \\ 1 - 0.22 \cdot y & \text{при } y \leq 1 \end{cases}, \quad (11)$$

Второе условие в выражении (1) можно записать в виде [Рекомендации, 1974]:

$$Yu \geq G(t) \cdot F_h(t), \quad (12)$$

$$G(t) = \frac{l^2}{6EJ} \cdot \frac{1 - \cos(\delta \cdot l)}{\delta \cdot \sin(\delta \cdot l)}, \quad (13)$$

где F_h – горизонтальная нагрузка на голову сваи в уровне ростверка, н; l – изгибаемый участок сваи, м; EJ – жесткость сечения сваи, н.м²; δ – параметр, учитывающий влияние вертикальной нагрузки, 1/м.

Для стальных труб $EJ = E \cdot \frac{\pi}{64} (d_{out}^4 - d_{in}^4)$ (E – модуль упругости стали, Па; d_{out}, d_{in} – внешний и внутренний диаметр трубы, м.).

$$\delta = \sqrt{\frac{F_v}{EJ}}, \quad (14)$$

$$l = L_0 + D_{th} + 1.5 \cdot b, \quad (15)$$

L_0 – высота ростверка сваи над дневной поверхностью, м; b – наибольшая сторона призматической сваи или внешний диаметр сваи круглого сечения (d_{out}), м; D_{th} – глубина сезонного оттаивания грунта, м.

При этом правая часть выражения (10) есть Y_0 , а левая зависит от прочности сваи и для трубчатых металлических свай вычисляется по формуле:

$$Y_u \leq \frac{\sigma_{fl} \cdot l^2 \cdot W}{6EJ}, \quad (16)$$

где σ_{fl} – предел текучести стали, Па; W – момент сопротивления сечения сваи,

м³. Для свай из труб $W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_{out}^4 - d_{in}^4}{d_{out}}$.

Поделив обе части неравенства (12) на $G(t)$, мы представим второе условие в формуле (1) в виде соотношения между горизонтальными нагрузками аналогичное выражению (2) – соотношению между вертикальными нагрузками. Далее рассуждая также как и в случае вертикальных нагрузок, получим формулу для коэффициента безопасности в случае горизонтальной нагрузки:

$$\gamma_h = \frac{F_{h,u} / F_h^* - 1}{V_{Fh}} = \frac{Y_u / Y_0^* - 1}{V_{Fh}}, \quad (17)$$

где $F_{h,u}, F_h^*$ – математическое ожидания предельной и фактической горизонтальной нагрузки, н; v_{Fh} – коэффициент вариации горизонтальной нагрузки, б.р.; Y_0^* – математическое ожидание горизонтального перемещения головы сваи, м;.

Коэффициент вариации горизонтальной нагрузки, которая в основном зависит от ветрового давления на надземную часть сооружения, выразим через коэффициент вариации максимальной скорости ветра. Известно, что ветровое давление прямо пропорционально квадрату максимальной скорости ветра

$F_h = K \cdot W_{\max}^2$. При нормальном законе распределения математическое ожидание и дисперсия этой функции будут равны: $m_{Fh} = K \cdot m_{W\max}$, а

$$D_{Fh} = \left[\frac{\partial(K \cdot W_{\max}^2)}{\partial W_{\max}} \right]^2 \cdot D_{W\max} = (2 \cdot K \cdot m_{W\max})^2 \cdot D_{W\max}. \text{ Откуда среднее квадратическое}$$

отклонение горизонтальной нагрузки будет: $\sigma_{Fh} = \sqrt{D_{Fh}} = 2 \cdot K \cdot m_{W\max} \cdot \sigma_{W\max}$.

Поделив среднее квадратическое отклонение горизонтальной нагрузки на ее математическое ожидание получим коэффициент вариации горизонтальной нагрузки:

$$v_{Fh} = \frac{2 \cdot K \cdot m_{W\max} \cdot \sigma_{W\max}}{K \cdot m_{W\max}} = 2 \cdot \frac{\sigma_{W\max}}{m_{W\max}} = 2 \cdot v_{W\max}.$$

С учетом этой зависимости перепишем формулу (15).

$$\gamma_h = \frac{Y_u / Y_0^* - 1}{2 \cdot v_{W\max}}, \quad (18)$$

Теперь по аналогии с (7) напомним формулу для интенсивности отказов при действии горизонтальной нагрузки:

$$m(\gamma_h) = \frac{\exp(-0.5\gamma_h^2)}{\gamma_h \sqrt{2\pi}}, \quad (19)$$

Из теории выбросов известно, что число выбросов n есть дискретная случайная величина с интегральной функцией распределения $F_y(t, n)$. Отсюда следует, что $P(t) = F_y(t, 0)$. Для распределения Пуассона $F_y(t, 0) = \exp[-\mu(t)]$, где $\mu(t)$ – математическое ожидание числа выбросов за время t .

Допуская, что выбросы от действия вертикальной и горизонтальной нагрузки являются независимыми случайными процессами, их число можно считать аддитивной величиной, т.е. число выбросов за время t равно сумме выбросов от действия вертикальной и горизонтальной нагрузки за каждый год в интервале времени от 0 до t :

$$\mu(t) = t \cdot [m(\gamma_v) + m(\gamma_h)], \quad (20)$$

где t – число лет.

Принимая вышесказанное во внимание, окончательно получим:

$$P(t) = \exp[-\mu(t)]. \quad (21)$$

Список литературы

1. Рекомендации по расчету свайных фундаментов на вечномерзлых грунтах на горизонтальное сейсмическое воздействие. Красноярск: Красноярский ПромстройНИИпроект, 1974. 17 с.
2. СНиП 2.02.04-88. Основания и фундаменты на вечномерзлых грунтах. М.: Стройиздат, 1990. 53 с.
3. Хрусталева Л.Н., Пустовойт Г.П. Вероятностно-статистические расчеты оснований зданий в криолитозоне. Новосибирск: Наука, 1988. 253 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ РИСКОВ И УЩЕРБОВ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ГАЗО - НЕФТЕПРОВОДОВ. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, ПРЕДСКАЗАНИЕ

Г.Д. Чачанидзе

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Категорирование промышленных объектов нефтегазовых производственных систем и объектов инфраструктуры предполагает не только определение, но и практическую реализацию дифференцированных требований по их защищенности. Поэтому следующей по значимости задачей, обеспечивающей перевод требований в конкретные организационно-технические решения по каждому объекту, является анализ уязвимости объектов, проводимый с целью оценки реально существующей защищенности объектов и выработки обоснованных требований и рекомендаций по ее усилению. Целью анализа уязвимости является выделение критических элементов и уязвимых участков объекта. Анализ уязвимости проводится для прогнозирования сценариев развития аварийных ситуаций на объектах повышенной опасности [1].

Анализ уязвимости направлен, в первую очередь, на изучение технической специфики аварийности, вызванной теми или иными видами случайных разрушительных воздействий на важнейшие элементы защищаемого объекта, и на исследование эффективности реагирования технологических систем контроля и блокировок на такие воздействия [2-3].

С технической точки зрения проблема состоит в том, что процессы возникновения и развития аварий, вызываемых различными факторами на жизненно важные элементы потенциально опасных объектов, отличаются от аналогичных процессов, протекающих при авариях, вызванных чисто технологическими факторами [4]. Так, в первом случае имеют место кратковременные мощные воздействия на случайным образом выбираемые участки конструкции объектов морского и шельфового базирования, а во втором происходит длительное накопление результатов незначительных по мощности воздействий, суммирующихся в виде микроскопических дефектов конструктивных элементов, перерастающих в процессе эксплуатации в дефекты критических размеров. С учетом того, что анализ уязвимости имеет, прежде всего, техническую специфику, целесообразно проводить его в три этапа:

- выделение критических (жизненно важных) элементов объекта;
- оценка устойчивости критических элементов объекта к наиболее вероятным видам разрушительных воздействий (к механическим воздействиям, взрыву и др.);
- отбор критических элементов, отличающихся повышенной уязвимостью в условиях умышленных разрушительных воздействий.

Следует отметить разницу между критическими элементами объекта и его уязвимыми местами.

Критический элемент объекта тот, выход из строя которого однозначно приводит к прекращению функционирования объекта в целом и, в случае потенциально-опасных объектов, – к чрезвычайным ситуациям. Уязвимые места объекта – те его критические элементы, в отношении которых в силу их недостаточной устойчивости или низкого уровня защищенности могут произойти аварии и катастрофы [5].

Выделение критических элементов возможно по результатам влияния того или иного технологического элемента на устойчивость работы всего объекта. Речь идет об анализе технологической карты объекта, в частности об изучении предусмотренных в конструкции и технологии эксплуатации защит и блокировок от аварийных ситуаций и о выявлении таких точек, воздействие на которые гарантированно прервет процесс технологический или эксплуатации. В дальнейшем исследуется, каковы могут быть последствия разрушительного воздействия на эти элементы с помощью доступных средств и методов.

В настоящее время для оценки опасности ЧС в природной и техногенной сферах, в том числе и при авариях на объектах нефтегазовой инфраструктуры, выработки и обоснования эффективности мероприятий по предотвращению или ослаблению негативных последствий чрезвычайной ситуации, широко используется понятие риска – вероятностной меры возникновения опасного техногенного или природного явления и возможного при этом социального, экологического, экономического ущерба.

Для снижения неопределенности в оценках риска необходима последовательная работа по фиксации и анализу отказов техники и оборудования, аварий, последствий социальных и материальных в рамках всего комплекса нефтедобывающей платформы. Накопленный статистический материал можно использовать с целью повышения безопасности автозаправочных станций.

Износ оборудования приводит к увеличению частоты возникновения отказов запорной арматуры и предохранительных устройств и соответственно к увеличению вероятности возникновения чрезвычайных ситуаций. Существенным образом на показатели риска влияет профессиональная и противопоаварийная подготовка персонала. Некачественная подготовка персонала может привести к ошибкам в процессе ведения технологического процесса и в поведении при возникновении аварийной ситуации. Использование и поддержание пожарной сигнализации в рабочем состоянии сокращает время прибытия пожарных расчетов на место пожара. Противопожарная подготовка персонала опасного объекта, использование современных средств пожаротушения – всё это мероприятия, которые минимизируют риск гибели человека при возможном пожаре и выводят значение индивидуального риска в пределы приемлемого.

В качестве одного из основных показателей уровня безопасности паспортизируемого опасного объекта используется такой показатель, как индивидуальный риск, определяющий все основания для выбора уровня приемлемого риска и позволяющий оценить психологическое равновесие человека при угрозе его жизни.

На основе применения методов количественного анализа риска и после рассмотрения всех основных опасностей, связанных с эксплуатацией нефтедобывающей платформы

1. Проанализированы возможные причины возникновения, сценарии и условия протекания чрезвычайных ситуаций.

2. Рассчитаны возможные зоны поражения и количество пострадавших.

3. Получены количественные оценки риска, в том числе вероятности возникновения и развития различных сценариев ЧС, показатели индивидуального, социального рисков, распределения потенциального территориального риска.

Статистические данные по отказам применяемых технических устройств, экспертные оценки были проанализированы и построены в соответствии с РД 08-120-96.

С помощью математического моделирования вычислены основные сценарии и условия протекания аварийных ситуаций. Рассчитаны возможные зоны поражения и количество пострадавших от возможных чрезвычайных ситуаций. Процесс расчета состоит из нескольких этапов. В первую очередь моделируется разрыв участка газопровода на перегоне между компрессорными станциями KC_1 и KC_2 на расстоянии L_1 (м) от KC_1 (рис. 1).

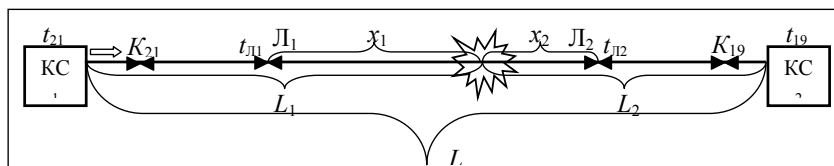


Рис.1 Схема фрагмента магистрального газопровода

При моделировании процессов, связанных с разрывом газопровода, для расчетов требуется большое количество входной информации и параметров, например:

λ – коэффициент гидравлического сопротивления, б/р;

d_0 – внутренний диаметр трубы, м;

P_1^{CP} (Па), T_1^{CP} (К) – средние давление и температура для первого аварийного участка газопровода;

Q – производительность газопровода в нормальном режиме его эксплуатации, млн. м³/сут;

P_H, P_K – давления в начале и конце газопровода до его разрыва, Па;

ρ – плотность газа при нормальных условиях, г/м³;

L_1, L_2 – расстояния от места разрыва до $KC1$ и $KC2$ соответственно, м;

x_1, x_2 – расстояния от места разрыва до ближайших линейных кранов, м;

k – показатель адиабаты газа, б/р.

Основными определяемыми параметрами являются:

$G_1(t)$ – массовый расход газа, истекающего из первого аварийного участка, (кг/с);

M_1, M_2 – полная масса газа, выброшенная из первого и второго аварийного участков соответственно, кг.

Время, прошедшее от момента аварии до момента полного закрытия станционного охранного крана K_{21} на KC_1 , составляет величину t_{21} , (с) (включает время идентификации аварии оператором, время принятия им решения об отключении КС и время закрытия охранного крана). Аналогичное время для крана K_{19} на KC_2 величину t_{19} (с). Ближайшие к месту аварии линейные краны L_1 и L_2 расположены на расстояниях x_1 , (м) и x_2 (м). Линейные краны полностью закрываются через время t_L (с) от момента аварии. Последовательность развития аварийного процесса истечения газа следующая. При возникновении аварийного разрыва вверх и вниз по потоку движется волна разрежения. Идентификация аварийного разрыва проводится операторами на КС по одному из двух характерных условий: либо по падению давления на 0,2 МПа в нагнетательном коллекторе компрессорной станции, расположенной вверх по потоку от места разрыва, либо по срабатыванию антипомпажной защиты на компрессорной станции, расположенной вниз по потоку от места разрыва, при снижении производительности во всасывающем коллекторе на 10 %. На газопроводах, оснащенных современными средствами телемеханики и автоматизированными системами управления технологическими процессами (далее АСУ ТП) транспорта газа, возможна автоматическая идентификация разрыва средствами АСУ ТП, но, тем не менее, решение о закрытии кранов принимается оператором (диспетчером). После идентификации разрыва газопровода на перегоне между двумя соседними станциями оператор принимает решение на закрытие охранных кранов КС и линейных кранов на перегоне. В данном сценарии для большей общности принимается, что закрытие кранов может происходить не одновременно. До своего отключения KC_1 нагнетает на перегон дополнительную массу газа M_{KC1} , а KC_2 забирает из аварийного участка массу M_{KC2} . Аварийным участком считается участок от места разрыва трубопровода до компрессорной станции (под первым аварийным участком понимается участок от места разрыва до KC_1 , соответственно под вторым аварийным участком – участок от места разрыва до KC_2) Аварийной секцией считается участок от места разрыва до ближайшего линейного крана (если линейный кран отсутствует или не может быть закрыт, – под аварийной секцией понимается весь аварийный участок и расчет истечения ведется только по формулам первого этапа).

Расчет истечения газа для каждой из аварийных секций производится в два этапа. На первом этапе рассчитывается аварийный расход газа от момента аварии до момента закрытия линейного крана. На втором – аварийный расход газа из отсеченной секции (после закрытия линейного крана) до его полного истечения. Разгерметизация многониточного газопровода рассчитывается в предположении, что число ниток две и более ($N \geq 2$).

Моделируется разрыв участка многониточного газопровода на перегоне между компрессорными станциями KC_1 и KC_2 на расстоянии L_1 от KC_1 (рис. 2).

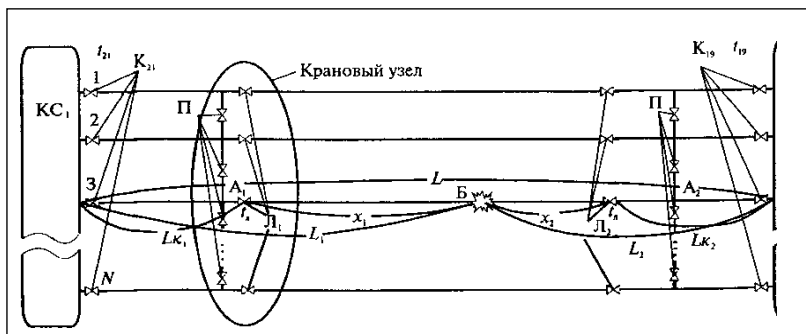


Рис. 2. Обобщенная схема многониточного газопровода

Сценарий аварии соответствует таковому для однопоточного газопровода. Аварийным участком считается участок А – С (рис. 3) от места разрыва многопоточного трубопровода до компрессорной станции (под первым аварийным участком понимается участок от места разрыва до КС₁, соответственно под вторым аварийным участком – участок от места разрыва до КС₂. Аварийной секцией считается участок Б – С от места разрыва до ближайшего линейного крана на крановом узле (если линейный кран отсутствует или не может быть закрыт, – под аварийной секцией понимается весь аварийный участок, и расчёт истечения ведётся только по формулам первого этапа).

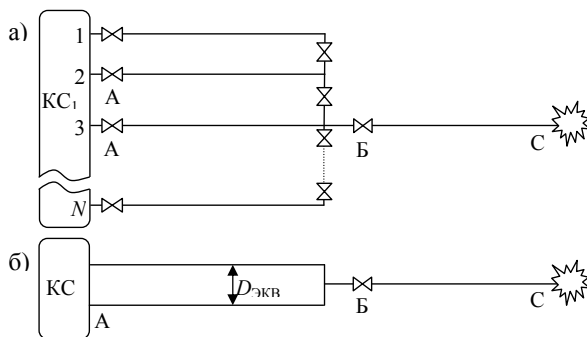


Рис. 3. Эквивалентная схема многопоточного газопровода для расчёта аварийного истечения

Предполагается, что отключение кранов на участке от места аварии до КС₂ происходит до полного опорожнения второго аварийного участка (т.е. предполагается, что $M_T > 0$). $M_{КС}$ – масса газа, которая нагнетается в аварийный участок газопровода КС₁ до момента отсечения аварийного участка, кг (если время закрытия крана меньше времени отключения КС, т.е. $t_{Л} < t_{21}$).

Список литературы

1. Котляревский В.А., Кочетков К.Е., Носач А.А., Забегаев А.В. Аварии и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий. – М., Издательство АСВ / 1995. – 320 с.
2. Потехин Г.С., Прохоров Н.С., Терещенко Г.Ф. Управление риском в химической промышленности.// Журнал Всес. хим. общества им. Менделеева, 1990, т. 35, №4, – С. 421-424.
3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высоко температурных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966. – 208 с.
4. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М., Мир, 1984. – 450 с.
5. Розловский А.И. Основы техники взрывобезопасности при работе с горючими газами и парами. М., Химия, 1980. -160 с.

О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЖЕЛОБА

Л.М. Юферева¹, Ю.А. Лавров²

¹ Петербургский государственный университет путей сообщения

² Санкт-Петербургский государственный университет

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный, четный по переменным φ и z процесс прохождения теплоты через отрезок цилиндрической трубы, занимающей область $\Omega = \{R_0 < r < R_M, -\beta < \varphi < \beta, -H < z < H\}$. Область разделена поверхностями $r = R_m$ ($m = 1, 2, \dots, M-1$) на M слоев $R_{m-1} < r < R_m$, занимаемых материалами с различными теплофизическими свойствами; $R_m = R_0 + \sum_{j=1}^m h_j$, h_m – толщина m -го слоя.

Превышение температуры над температурой окружающей среды в толще материала трубы разыскивается в виде кусочно-однородной функции $T(r, \varphi, z) = \{T_m(r, \varphi, z), R_{m-1} < r < R_m\}_{m=1, \dots, M}$. Эта функция удовлетворяет однородному уравнению Лапласа

$$\Delta T(r, \varphi, z) = 0, \quad (1)$$

граничным условиям конвективного теплообмена на цилиндрических поверхностях

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \right) T_1(r, \varphi, z) \Big|_{r=R_0} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha_2}{\lambda_M} \right) T_M(r, \varphi, z) \Big|_{r=R_M} = 0, \quad (2)$$

условиям заданного потока теплоты через кольцевые торцевые поверхности

$$\lambda_m \frac{\partial T_m(r, \varphi, z)}{\partial z} \Big|_{z=H} = Z_m(r, \varphi), \quad (3)$$

и через прямоугольные торцевые поверхности

$$\lambda_m \frac{\partial T_m(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\beta} = \Phi_m(r, z). \quad (4)$$

Здесь α_j – коэффициент теплоотдачи у внутренней ($j=1$) и внешней ($j=2$) поверхности цилиндра, $Z_m(r, \varphi)$, $\Phi_m(r, z)$ – плотности потоков теплоты, принимаемой торцевыми поверхностями, λ_m ($m=1, 2, \dots, M$) – коэффициент теплопроводности m -го слоя.

На поверхности контакта каждой пары соседних слоев выполняются условия сопряжения

$$T_m(R_m - 0, \varphi, z) - T_{m+1}(R_m + 0, \varphi, z) = 0, \quad (5)$$

$$\lambda_m \frac{\partial T_m(r, \varphi, z)}{\partial r} \Big|_{r=R_m-0} - \lambda_{m+1} \frac{\partial T_{m+1}(r, \varphi, z)}{\partial r} \Big|_{r=R_m+0} = 0. \quad (6)$$

2. Аналитическое решение

Решение поставленной задачи разыскивается в виде суммы

$$T_m(r, \varphi, z) = T_m^{(1)}(r, \varphi, z) + T_m^{(2)}(r, \varphi, z), \quad (7)$$

где $T_m^{(1)}(r, \varphi, z)$ удовлетворяет условиям (1)–(2), (4)–(6), и однородному условию, соответствующему (3), $T_m^{(2)}(r, \varphi, z)$ удовлетворяет условиям (1)–(3), (5)–(6), и однородному условию, соответствующему (4). Далее, ввиду ограниченности объема работы, строится только первое слагаемое в (7),

$$T_m^{(1)}(r, \varphi, z) = \sum_{l=0}^{+\infty} \cos(q_l z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cosh(p_{ln} \varphi)}{\cosh(p_{ln} \beta)} c_{ln}^{(k)} u_{lnm}^{(k)}(r), \quad (8)$$

$q_l = \pi l / H$, $k=1$, $u_{lnm}^{(1)}(r) = a_{lnm} J_{l p_{ln}}(-i q_l r) + b_{lnm} J_{-l p_{ln}}(-i q_l r)$, $l = \sqrt{-1}$, $c_{ln}^{(1)}$ – произвольные пока коэффициенты. Столбец $x = (a_{ln1}, b_{ln1}, \dots, a_{lnM}, b_{lnM})^T$ является (при каждой паре индексов l, n) решением линейной однородной системы уравнений

$$L(lp, -i q_l)x = 0. \quad (9)$$

В матрице $L(\mu, \nu)$ размерами $2M \times 2M$ и в столбце P размерами $2M \times 1$ отличны от нуля только следующие элементы:

$$L_{11}(\mu, \nu) = \nu \zeta'(\mu, \nu R_0) - \frac{\alpha_{k1}}{\lambda_1} \zeta(\mu, \nu R_0), \quad L_{12}(\mu, \nu) = \nu \zeta'(\mu, \nu R_0) - \frac{\alpha_{k1}}{\lambda_1} \xi(\mu, \nu R_0),$$

$$L_{2m, 2m-1}(\mu, \nu) = -L_{2m, 2m+1}(\mu, \nu) = \zeta(\mu, \nu R_m),$$

$$L_{2m, 2m}(\mu, \nu) = -L_{2m, 2m+2}(\mu, \nu) = \xi(\mu, \nu R_m),$$

$$L_{2m+1, 2m-1}(\mu, \nu) = \lambda_m \nu \zeta'(\mu, \nu R_m), \quad L_{2m+1, 2m+1}(\mu, \nu) = -\lambda_{m+1} \nu \zeta'(\mu, \nu R_m),$$

$$L_{2m+1, 2m}(\mu, \nu) = \lambda_m \nu \xi'(\mu, \nu R_m), \quad L_{2m+1, 2m+2}(\mu, \nu) = -\lambda_{m+1} \nu \xi'(\mu, \nu R_m),$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$L_{2M,2M-1}(\mu, \nu) = \nu \zeta'(\mu, \nu R_M) + \frac{\alpha_2}{\lambda_M} \zeta(\mu, \nu R_M), \quad P_1 = -f_{1n1} \frac{\alpha_1}{\lambda_1},$$

$$L_{2M,2M}(\mu, \nu) = \nu \zeta'(\mu, \nu R_M) + \frac{\alpha_2}{\lambda_M} \zeta(\mu, \nu R_M), \quad P_{2M} = f_{1n2} \frac{\alpha_2}{\lambda_M},$$

$$\zeta(\mu, x) = J_\mu(x), \quad \xi(\mu, x) = J_{-\mu}(x).$$

Безразмерную величину p здесь следует рассматривать как корень уравнения, которое является условием существования нетривиального решения однородной системы (9):

$$\det L(ip, -iq_l) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет для каждого индекса l счетное множество положительных решений, нумеруемых индексом n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Это множество составляет набор собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля для зависящих от переменной r множителей в слагаемых l -й гармоники (по переменной z) искомой функции $T(r, \varphi, z)$. Для элементов множества выбрано обозначение p_{ln} . При поиске величин p_{ln} неизбежна комплексная арифметика, однако, сами эти величины вещественны. При вычислении элементов столбца x , соответствующих найденному p_{ln} , можно положить $a_{ln1} = 1$, а прочие его элементы отыскивать с помощью системы (9), из которой при этом следует исключить одно из уравнений, к примеру, первое. Найденные таким образом величины a_{lnm} , b_{lnm} и функции $u_{lnm}^{(1)}(r)$ являются комплексными, однако, функции $u_{lnm}^{(0)}(r) = u_{lnm}^{(1)}(r) / u_{ln1}^{(1)}(R_0)$ являются вещественными. Следовательно, в выражении (8) далее можно положить $k = 0$, что позволит разыскивать вещественные коэффициенты $c_{ln}^{(0)}$ ($c_{ln}^{(0)} = c_{ln}^{(1)} u_{ln1}^{(1)}(R_0)$).

При каждом l набор попарно ортогональных кусочно-однородных функций $u_{ln}^{(0)}(r)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, составляет базис на промежутке $[R_0, R_M]$.

Скалярное произведение имеет вид $(\psi_1(r), \psi_2(r)) = \int_{R_0}^{R_M} w(r) \psi_1(r) \overline{\psi_2(r)} dr$, использующий кусочно-однородную весовую функцию $w(r) = \{\lambda_m / r, R_{m-1} < r < R_m\}_{m=1, \dots, M}$. С применением принципа единственности разложения по этому базису, далее, следуя [1], можно выполнить последнее из постановочных условий (4).

В работе [2] отмечено, а в [1] численно подтверждено, что среди факторов p_{ln} решающее влияние на точность получаемого решения оказывают те из них, для которых $n = 0$. Поэтому представляется полезным применить приближенный метод поиска p_{l0} , основанный на разложении по степеням малого параметра $h = h_1 + h_2 + \dots + h_M$ самой величины p в уравнении (10) и, далее, левой части этого уравнения:

$$p_{l0} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \kappa_0 + \kappa_1. \quad (11)$$

Используются обозначения:

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= R_0 \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\gamma}}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa_{11} + \kappa_{12} + \kappa_{13}}{12\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma^5}}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^M h_i \lambda_i, \\ \kappa_{11} &= -\sum_{i=1}^M h_i^3 \lambda_i (2R_0(\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 - 3\lambda_i^2 q_i^2) - 3(\alpha_1 + 3\alpha_2) \lambda_i), \\ \kappa_{12} &= -3 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M (h_i^2 h_j (2R_0(\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2) \lambda_j + \alpha_2^2 \lambda_i^2 \lambda_j^{-1}) \\ &\quad - 3\alpha_1 \lambda_i \lambda_j - \alpha_2 \lambda_i (2\lambda_i + 7\lambda_j) - 6q_i^2 R_0 \lambda_i^2 \lambda_j) + h_i h_j^2 (2R_0(\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) \lambda_i + \alpha_1^2 \lambda_i^{-1} \lambda_j^2) \\ &\quad - \alpha_1 \lambda_i (2\lambda_i + \lambda_j) - \alpha_2 \lambda_j (5\lambda_i + 4\lambda_j) - 6q_j^2 R_0 \lambda_i \lambda_j^2)), \\ \kappa_{13} &= -6 \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \sum_{k=j+1}^M \frac{h_i h_j h_k}{\lambda_i \lambda_j \lambda_k} (2R_0(\alpha_1^2 \lambda_j \lambda_k \lambda_i^{-1} - \alpha_1 \alpha_2 \lambda_i \lambda_k \lambda_j^{-1} + \alpha_2^2 \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{-1}) \\ &\quad - \alpha_1 \lambda_k (\lambda_i + 2\lambda_j) - \alpha_2 \lambda_i (2\lambda_j + \lambda_k) - 4\alpha_2 \lambda_j \lambda_k - 6q_i^2 R_0 \lambda_i \lambda_j \lambda_k).\end{aligned}$$

Представленные здесь выражения для коэффициентов в (11) являются новыми.

3. Численные результаты

При проведении вычислений принято $\alpha_1 = \alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{К})$, $R_0 = 0.0125 \text{ м}$. Количество слоев берется нечетным. Материал слоя с нечетным номером ($m=1,3,5,7$) – цинк, с четным номером ($m=2,4,6$) – железо. Толщины слоев равны между собой ($h_2 = \dots = h_M = h_1$). Действие приближенной формулы (11) представлено на Рис.1 при $q_l = \pi/4 \text{ м}^{-1}$, и Рис.2 при $h_1 = 0.0005 \text{ м}$. Номера кривых 1, 2, 3, 4 соответствуют количеству слоев $M=1,3,5,7$.

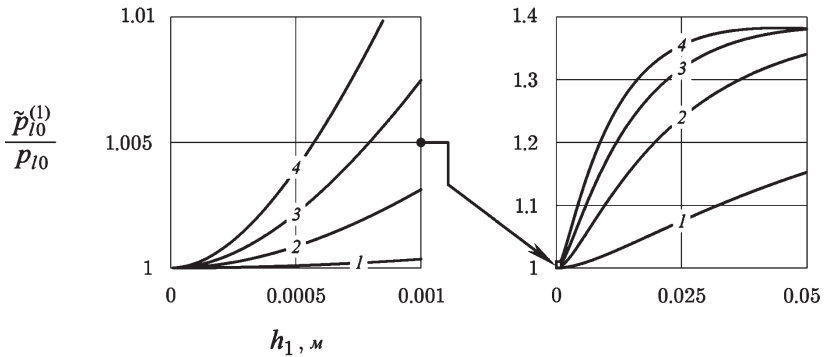


Рис.1

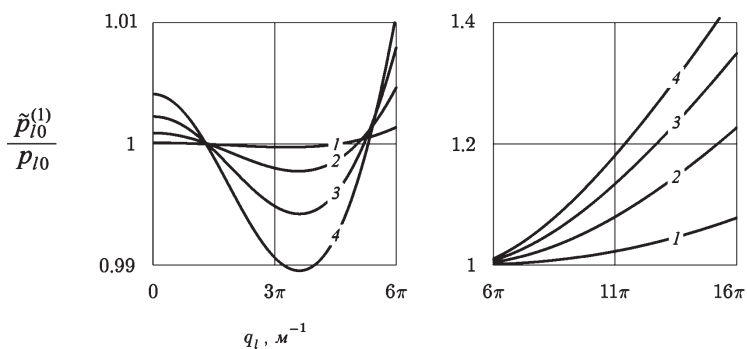


Рис.2

Список литературы

1. Юферева Л.М., Лавров Ю.А. Стационарное тепловое поле кусочно-однородного прямоугольного бруса // Известия РАН. Энергетика. – 2005. – № 2. С. 129-137.
2. Кудинов В.А. Аналитические методы решения краевых задач для многослойных конструкций // Известия РАН. Энергетика. – 1999. – № 5. С. 85-106.

СЕКЦИЯ №2

Вероятностно-статистические модели, методы расчета надежности и прочности сложных технических систем

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕЦЕНТРАЛЬНОГО χ^2 РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

К.С. Андрейцева, Н.И. Сидняев

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Проверка адекватности модели должно выполняться на основе четких априорных представлений о классе адекватных моделей, поскольку при решении практических задач этот класс является конечным. Дисперсионный анализ определяется как статистический метод, предназначенный для оценки влияния различных факторов на результат наблюдения, в связи с чем область применения этого метода становится значительно шире [1]. Основная идея дисперсионного анализа заключается в разбиении суммы квадратов отклонений на несколько компонент, каждая из которых соответствует предполагаемой причине изменения средних. При проверке статистических гипотез эффективность процедуры проверки оценивается возможностью обнаружения отклонений от нулевой гипотезы. Так, необходимо знать распределение проверочной t -статистики не только при нулевой гипотезе, но и при допустимых альтернативных гипотезах. Нецентральное χ^2 -распределение возникает в случае, если необходимо найти распределение суммы квадратов независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с отличными от нуля средними и единичными дисперсиями [1, 2].

Необходимо отметить, что функция распределения неотрицательной и неоднородной квадратичной формы с конечным числом нормальных случайных величин может быть выражена через функцию нецентрального χ^2 -распределения с произвольными параметрами. Следовательно, приближенное вычисление нецентрального χ^2 -распределения представляет большой интерес. Это распределение включает в себя три параметра: 1) параметр нецентральности, обозначаемый λ ; 2) степени свободы, обозначаемые ν ; 3) уровень значимости α , обозначаемую как

Предположим $y = \chi^2$ и нецентральное χ^2 -распределение в виде:

$$F(y; \lambda, \nu) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}+j-1} \lambda^j}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2} + j\right] 2^{2j} j!} dx, \quad (1)$$

Рассмотрим присоединенную функцию $G(y; \lambda, \nu)$:

$$G(y; \lambda, \nu) = 1 - F(y; \lambda, \nu) = \int_y^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}+j-1} \lambda^j}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}+j\right] 2^{2j} j!} dx. \quad (2)$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования в выражении (2), получим:

$$G(y; \lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!} \left[\frac{1}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}+j\right]} \int_y^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+j-1} e^{-\frac{x}{2}} d\frac{x}{2} \right]. \quad (3)$$

Рассмотрим интеграл:

$$I(p, y) = \frac{1}{\Gamma[p/2]} \int_y^{\infty} u^{\frac{p}{2}-1} e^{-u} du \quad (4)$$

где $p = \nu + 2j$ целое, $p \geq 1$. Считаем, что p - четное, тогда $p/2$ целое. Проинтегрируем выражение (4) по частям и получим:

$$I(p, y) = \left[\frac{e^{-y} y^{\frac{p}{2}-1}}{\left(\frac{p}{2}-1\right)!} \right] + \left[\frac{e^{-y} y^{\frac{p}{2}-2}}{\left(\frac{p}{2}-2\right)!} \right] + \dots + \left[\frac{e^{-y} y^{-0}}{0!} \right] = \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-1} P_i(y), \quad (5)$$

где $P_i(p, y) = \frac{e^{-y} y^i}{i!}$ - функция плотности распределения Пуассона.

Рассмотрим случай, когда p - нечетное целое число, тогда $p/2$ - нечетное число, кратное $1/2$. Проинтегрировав (4), получим:

$$I(p, y) = \left[\frac{e^{-y} y^{\frac{p}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \right] + \left[\frac{e^{-y} y^{\frac{p}{2}-2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)} \right] + \dots + \left[\frac{e^{-y} y^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right] + \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \int_y^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx, \quad (6)$$

где последний интеграл при замене $u^{\frac{1}{2}} = x$ сводится к интегралу вероятности нормального распределения:

$$2\pi^{-1/2} \int_{y^{1/2}}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Отсюда (6) может быть представлено в виде:

$$I(p, y) = \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} Q_i(y), \quad (7)$$

$$Q_i(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y} y^{i-1/2}}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}, & i \geq 1, \\ 2\pi^{-1/2} \int_{y^{1/2}}^{\infty} e^{-u^2} du, & i = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Объединим (3), (5) и (7) и получим:

$$G(y; \lambda, \nu) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} P_j \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sum_{i=0}^{\frac{\nu}{2}+j-1} P_i \left(\frac{y}{2} \right), \nu - \text{четное} \\ \sum_{j=0}^{\infty} P_j \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sum_{i=0}^{\frac{\nu}{2}+j-1/2} Q_i \left(\frac{y}{2} \right), \nu - \text{нечетное} \end{cases} \quad (9)$$

Функция может быть вычислена с помощью (2) и (9):

$$F(y; \lambda, \nu) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} P_j \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sum_{i=\frac{\nu}{2}+j}^{\infty} P_i \left(\frac{y}{2} \right), \nu - \text{четное} \\ \sum_{j=0}^{\infty} P_j \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sum_{i=\frac{\nu}{2}+j+1/2}^{\infty} Q_i \left(\frac{y}{2} \right), \nu - \text{нечетное} \end{cases} \quad (10)$$

Поменяв местами порядки суммирования, получим:

$$F(y; \lambda, \nu) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} P_{\frac{\nu}{2}+i} \left(\frac{y}{2} \right) \sum_{j=0}^i P_j \left(\frac{\lambda}{2} \right), \nu - \text{четное} \\ \sum_{i=0}^{\infty} Q_{\frac{\nu}{2}+i+1/2} \left(\frac{y}{2} \right) \sum_{j=0}^i Q_j \left(\frac{\lambda}{2} \right), \nu - \text{нечетное} \end{cases} \quad (11)$$

Представим

$$T_k \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \sum_{i=0}^k P_i \left(\frac{\lambda}{2} \right), k \geq 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{2k} \left(\frac{y}{2} \right) &= P_k \left(\frac{y}{2} \right) \\ S_{2k-1} \left(\frac{y}{2} \right) &= Q_k \left(\frac{y}{2} \right) \end{aligned} \right\} k \geq 1. \quad (13)$$

Тогда (11) может быть представлено в виде:

$$F(y; \lambda, \nu) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2} \right) T_i \left(\frac{\lambda}{2} \right) \quad (14)$$

Так как векторы не зависят от λ , то значение функции $F(y; \lambda, \nu)$ может быть вычислено для всех ν с помощью (14).

Вычисление завершается, когда значение функции F не меняется в указанной значащей цифре. Важно заметить, что значение остается постоянным для всех y, ν и $S \left(\frac{y}{2} \right)$ остается постоянным для всех λ, ν . Это замечание существенно сокращает время вычислений.

Теперь допустим, что нецентральное χ^2 - распределение выражается формулой:

$$F(y; \lambda, \nu) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}+j-1} \lambda^j}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2} + j\right] 2^{2j} j!} dx, \quad (15)$$

Здесь значения F можно вычислять для всех комбинаций значений λ , ν и y . Ошибка, полученная при вычислениях, возникает по двум причинам:

1. Усечение ряда (14),
2. Округление узловых значений.

Рассмотрим ошибку, полученную вследствие усечения ряда (14).

Запишем выражение (14):

$$F(y; \lambda, \nu) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2} \right) T_i \left(\frac{\lambda}{2} \right),$$

$$T_i(u) = \sum_{j=0}^i P_j(u), \quad S_{2k}(u) = P_k(u) S_{2k-1}(u) = Q_k(u),$$

$$P_k(u) = \frac{e^{-u} u^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

$$Q_k(u) = \begin{cases} 2\pi^{-1/2} \int_u^{\infty} e^{-v^2} dv, k = 0, \\ \frac{e^{-u} y^{k-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}, k \geq 1. \end{cases}$$

Пусть q - число членов ряда (14). Тогда ошибка в результате усечения ряда равна:

$$\sum_{i=q+1}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2} \right) T_i \left(\frac{\lambda}{2} \right) \leq \sum_{i=q+1}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2} \right), T_i \leq 1,$$

$$\sum_{i=q+1}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2} \right) = \begin{cases} \sum_{i=q+1}^{\infty} e^{-\frac{y}{2}} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2i+\nu}}{(2i+\nu)!}, \nu - \text{четное}, \\ \sum_{i=q+1}^{\infty} e^{-\frac{y}{2}} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2i+\nu-1/2}}{\Gamma(2i+\nu+1/2)!}, \nu - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Так как верхние значения распределения Пуассона могут быть представлены в виде нижних значений Гамма-распределения, то для ν - четного, получим:

$$\sum_{i=q+1}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2} \right) = [(2q+\nu+1)!] \int_0^{y/2} e^{-u} u^{2q+\nu+1} du. \quad (16)$$

Для ν - нечетного:

$$\sum_{i=q+1}^{\infty} S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2}\right) \leq \frac{\sum_{i=q+1}^{\infty} e^{-y/2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2i+\nu-1/2}}{(2i+\nu-1)!} = \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{1/2} \sum_{i=q+1}^{\infty} e^{-y/2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2i+\nu-1}}{(2i+\nu-1)!} =$$

$$= \left[(2q+\nu)!\right] \left(\frac{y}{2}\right)^{1/2} \int_0^{y/2} e^{-u} u^{2q+\nu} du. \quad (17)$$

Из (16) и (17) ясно, что ошибка в результате усечения ряда будет небольшой, особенно в случае, когда q мало, а y велико.

Далее, рассмотрим ошибку вследствие приближенного вычисления основных значений в ряде (14). Допустим, что ε и ε' обозначают абсолютные значения округленных ошибок в выражениях соответственно. Если рассматривать только q первые члены ряда, то максимальная ошибка при вычислении $F(y; \lambda, \nu)$ будет определяться при помощи формулы:

$$\sum_{i=1}^q \left[S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2}\right) + \varepsilon \right] \left[T_i \left(\frac{\lambda}{2}\right) + \varepsilon' \right] - \sum_{i=0}^q S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2}\right) T_i \left(\frac{\lambda}{2}\right) = \varepsilon \sum_{i=0}^q T_i \left(\frac{\lambda}{2}\right) + \varepsilon' \sum_{i=0}^q S_{2i+\nu} \left(\frac{y}{2}\right) + \varepsilon \varepsilon' q \leq$$

$$\leq q\varepsilon(1+\varepsilon') + \varepsilon' \quad \text{или} \quad q\varepsilon(1+\varepsilon') + \frac{1}{2} y \varepsilon',$$

в зависимости от того, четное ν или нечетное. Таким образом, ошибка вследствие округления ключевых значений незначительна, если одновременно $q\varepsilon$ и $y\varepsilon'$ малы. Очевидно, что количество членов зависящее от y , и q увеличивается в случае, если возрастает y . Следовательно, q меняется для разных вычислений.

Список литературы

1. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента. М.: Радио и связь, 1983. 248 с.
2. Теория вероятностей и математическая статистика /Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский ; Под ред. В.А.Колемаева. –М.: Высшая школа, 1991. –400с.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО РЕЖИМА В ЗАДАЧАХ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

В. Н. Белов, Т.Н. Козлова, П.А. Проценко
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Проблема переменного режима. Несколькими причинами обусловлена необходимость изучения кинетики временных процессов (ВП) различной природы (химических реакций, биопроцессов и т. д.) при переменных

(нестационарных) внешних условиях $\bar{u}(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^k(t))^T$, где в качестве факторов u^i могут выступить температура, давление, интенсивность ионизирующего излучения и т. п. [1, 2]. Нередко химические процессы (в частности, технологические) протекают при изменяющихся условиях $\bar{u}(t)$: окислительный и восстановительный обжиг руд и минералов, реакции, сопровождающиеся большими тепловыми эффектами, процессы самовозгорания и т. д. Это же касается режимов транспортировки и хранения материалов и изделий из них. Также имеется ряд методов (например, термоаналитических) определения кинетических параметров исследуемой реакции в статическом режиме по результатам экспериментов в динамических условиях, в частности, при линейном росте температуры. Такие методы относятся к весьма перспективным, в том числе для гетерогенных реакций, хотя имеются и существенные оговорки [3, стр.43].

Решение проблемы переменного режима для задач химической кинетики состоит в нахождении способов пересчёта результатов экспериментов в статических условиях к переменным (например, динамическим) и наоборот. Речь идет о восстановлении кинетических кривых превращения, расчётах времени протекания реакций или их стадий и т. п.

Конечно, столь сложную задачу не решить в отрыве от представлений о механизмах протекающих процессов, их многостадийности и многомаршрутности и методов решений прямой и обратной кинетических задач. Важно отметить, что проблема переменного режима носит междисциплинарный характер [1, 2] и это, как ниже убедимся, даёт свои преимущества при её решении.

Феноменологические модели химических процессов и их возможности.

Сложны внутренние законы реальных ВП различной природы, но наблюдаемые довольно устойчивые, внешние характерные зависимости позволили развивать макроуровневый феноменологический подход [1] к описанию ВП, в том числе для описания кинетики процессов при переменных условиях $\bar{u}(t)$. Ясно, что математические модели феноменологического происхождения не могут претендовать на воспроизведение всей полноты картины исследуемого процесса, но их право на существование оправдано мерой согласия расчётных характеристик процесса с экспериментальными. Вместе с тем есть основания считать, что к настоящему времени в основном исчерпаны возможности традиционного феноменологического подхода при создании математических моделей временных процессов.

Прежде всего это касается моделей ВП детерминистического толка [1, 2], в рамках которых не удаётся справиться с реально наблюдаемым разбросом экспериментальных данных (например, длительностей протекания процессов или их отдельных стадий), не удаётся разработать эффективные процедуры дискриминации нескольких моделей, описывающих один и тот же процесс в

одних и тех же внешних условиях $\bar{u}(t)$, не увенчались успехом и попытки создания универсальных моделей ВП – обобщённость модели привела к усложнению её формулировки и определенному отрыву от конкретных исследуемых процессов [1] и заставляет увеличивать число управляющих параметров модели без сбалансированного учёта фундаментальных предпосылок (например, физических). Пользователю весьма затруднительно отдать предпочтение одной из конкретных моделей процесса и зачастую фактически идет речь о «подгонке» модели к экспериментальным данным частного характера, хотя математическая модель процесса изначально призвана приносить новое знание о процессе.

Следствием затруднений с детерминированным описанием процессов стал в последней трети XX века поворот в сторону вероятностно-статистического (стохастического) описания, но адекватно его реализовать – далеко не простое дело. Классические модели химической кинетики оказались структурно неудобными для эффективной стохастизации, причём при её реализации обыкновенно происходит сохранение всех недостатков детерминированной модели.

Непосредственное применение случайных процессов к описанию процесса деструкции, например, марковских процессов и цепей [7], приносит с собой многовариантность такого описания, а это не позволяет далеко уйти от нерешённой проблемы неоднозначности определения констант химических реакций и параметров аррениусовской зависимости [2-5]. Соглашаясь с тем, что априорное рассмотрение процессов как чисто детерминированных – непродуктивно [5] и заведомо недостаточно введение интегральных критериальных параметров [4] возникает надежда, что гиперчувствительность носителя реакции к флуктуациям начальных условий и влиянию стенок реактора можно будет учесть моделями детерминированно-стохастического хаоса [1, 2, 4, 5], но и этот подход пока не продвигает исследователей в решении конкретных расчётных задач нестационарной кинетики.

О кризисе формально - кинетического подхода.

Ясно, что расчёт кинетики процесса для переменного режима невозможен без соотнесения скоростей протекания процесса при различных статических условиях. Но на фоне разброса экспериментальных данных дополнительные сложности привносит следующая сторона проблемы. Невозможно бывает у процесса с одним и тем же объектом-носителем (одна и та же навеска, проба, образец) измерить две или более характеристик (например, время до завершения процесса) при различных условиях реализации $\bar{u}_i(t)$, ибо измерение времени до завершения процесса в одном режиме приводит к необратимому изменению объекта – носителя процесса и вторичное определение этого же показателя у этого же объекта – носителя в других условиях не представляется возможным. Применение к таким задачам определения одновременно ненаблюдаемых величин классических методов

планирования эксперимента и математической статистики весьма затруднительно из-за отсутствия необходимой для этого информации, хотя практическая и теоретическая важность решения этих задач велика, ибо успех здесь определяет, в частности, перспективы справиться с проблемой переменного режима.

Одновременно с этим возникла почва для дискуссии о потенциальных возможностях термоаналитических методов («линейного роста температуры») [3, 8] и перспективности решения обратных задач химической кинетики [1, 2, 3, 10]. Согласно [10], обратная кинетическая задача (например, оценка констант скорости) не решается строго, а статистическая идентификация моделей по результатам кинетического эксперимента может быть корректно решена только при знании механизма, т. е. представлений о стадиях химического процесса, структуре искомой модели и начальных оценках констант. Образуется замкнутый круг – создание кинетической модели невозможно без знания механизма, но кинетические модели и призваны способствовать выяснению механизмов реакций.

Также правомерен вопрос о возможностях формально-кинетического подхода при изучении закономерностей исследуемого процесса и его механизма, например, из-за появления большого числа кинетических моделей одной и той же реакции в близких условиях реализации [1, 2, 10]. С развитием теории маршрутов [10] химии — кинетики подошли к осознанию некорректности традиционной методологии изучения кинетики – невозможно восстановить схему механизма многомаршрутной реакции непосредственно из экспериментальных данных, а добавок в ходе дискриминации гипотез о механизме, например, синтеза винилацетата [10] обнаружилось, что вид кинетической модели существенно зависит от способа приготовления одного и того же солевого катализатора.

Наступил период, когда прежняя система ведущих понятий и положений (парадигма) феноменологического макроописания процесса утратила способность разрешать возникающие затруднения и рассогласования, ассимилировать новый эмпирический материал и становится очевидным, что достройка и обогащение старой парадигмы уже невозможны без переосмысления основ этой теории и базовых методологических предпосылок. Острота ситуации отражена тезисом “Детерминированный хаос – новая парадигма в инженерной химии” [4].

На другом полюсе – бесспорны достижения последнего десятилетия при изучении кинетики химических реакций на «микроскопическом» уровне в рамках фемтохимии и следует отметить их чрезвычайную важность для обоснования базовых принципов химической кинетики, но, вопреки ожиданиям, они пока мало полезны для решения задач макрокинетического уровня [10]. Это напоминает ситуацию с познанием законов движения дислокаций (микроуровень), не приведших к качественному скачку при

решении задач расчёта прочности металлов и сплавов. Сопряжение микро- и макроуровневых описаний химического процесса ещё предстоит осуществить.

Предпосылки и алгоритм решения проблемы переменного режима.

Теперь уже можно сказать, что возникшие противоречия – это наша дань за неразработанность общего методологического подхода к сквозному (не локальному) описанию кинетики химических реакций и за малое число опытов с повторностями, что по инерции традиционно для химии, ибо неизбывна мечта исследователя получить большое знание малой кровью.

Оказалось, что не выходя за рамки традиционного формально-кинетического подхода трудно прояснить источник рассогласований и несоответствий. Классическая запись кинетического уравнения оказалась крайне неудобной для корректных обобщений на переменный режим, потребовав решения достаточно сложных чисто математических задач, например, по вычислениям криволинейного интеграла второго рода с полностью заданным векторным полем, но при необычных ограничениях на путь интегрирования. Если к тому же учесть важность выбора рациональной программы эксперимента и объёмов выборок, превышение которого не даёт существенного повышения точности оценивания, что требует квалифицированного сопровождения математика-статистика, то уровень математизации разрабатываемой теории, фактическое вступление в область сугубо математического знания вполне коррелирует с учащением употребления термина – «математическая химия».

Конечно, новые идеи обработки экспериментальных данных, особо это касается данных с большим рассеянием, должны быть направлены на получение качественно новых результатов, существенно новых знаний о закономерностях протекания исследуемого процесса, причём, может быть, получение этого знания другими способами трудно или даже невозможно. В [1, 2] доказано, что наблюдения над характеристиками процессов, реализованных с повторностями (коллективы) и подчиняющиеся какой-то общей закономерности («коллективное свойство»), могут дать средство познания закономерностей единичной реализации процесса. Именно эта закономерность, задаваемая пока в обобщённом виде, в виде некоторого гипотетического модельного описания, после грамотной конкретизации доставляет возможность измерения одновременно не измеряемых величин. Не следует воспринимать эти слова буквально, ибо идёт речь о выполнении некоторой модельной гипотезы или нескольких гипотез, которые исследователю должно по заранее принятой объективной процедуре принимать или отвергать по принципу их непротиворечивости результатам контрольных экспериментов.

Возможность записать кинетическую модель в явном виде уже соответствует высокому уровню априорной информации, но знание о конкретном процессе всегда будет неполно. В связи с этим становится очень важным использование при реконструкции требуемых зависимостей любой

априорной информации, апробированных общих закономерностей протекания ВП различной природы, информация о процессах – аналогах и такой интеграционный процесс – существо работ [1, 2]. К примеру, частую невозможность остановить химический процесс («заморозить») и после исследования текущей структуры его носителя вновь «запустить», возможно, при других внешних условиях $\bar{u}(t)$ – удаётся преодолеть за счёт аналогий, построенных на основе термодинамических предпосылок (нелинейной неравновесной термодинамики), например, за счёт анализа экспериментальных данных по процессам деструкции (накопления повреждений) материалов. В частности, обилие экспериментальных данных по процессам деструкции дало возможность апробировать множество идей и методов расчета кинетических характеристик процессов [2] на базе статистических методов, которые вполне применимы для расчёта динамики процессов другой природы.

Несмотря на многочисленность работ, посвящённых расчётам кинетики реакций при изменяющихся условиях, проблема далека от решения [1]. Предложенные детерминированные методы расчёта на основе обобщений классических кинетических моделей, уравнений теплового баланса и линейных моделей парциального типа себя не оправдали из-за низкой точности прогнозов [1, 2, 6, 8] и из-за наличия существенного разброса экспериментальных данных, в частности, по длительностям химических процессов и их отдельных стадий и, как минимум, потребовали квалифицированной стохастизации, однако адекватного стохастического подхода к решению этих проблем не найдено, что, по существу, и дало повод к упомянутым выше рассуждениям о кризисе формально-кинетического подхода [1, 2].

Предлагаемая ниже методология реализована на основе присущих всем процессам универсальных характеристик типа остаточного времени до завершения процесса (стадии), до достижения системой термодинамического равновесия и т. п. Только после этого открывается возможность расчёта в переменных режимах остальных характеристик процессов – концентраций реагентов, долей прореагировавшего вещества и т.п.

Анализ показал [1, 2], что в рамках формализованного описания кинетики химических процессов и ВП другой природы (биологических, накопления повреждений и т.д.) можно выделить четыре класса скалярных (однопараметрических) математических моделей феноменологического типа как постадийных, так и сквозных. Это прежде всего классическая кинетическая модель, в которой скорость изменения опорного (определяющего) параметра (ОП) $X(t, \bar{u})$ (доля прореагировавшего вещества и т.п.) явно задаётся через вектор $\bar{u}$ и набор внутренних параметров $\bar{q} = (q^1, q^2, q^3, \dots, q^m)^T$ (концентрация реагентов, удельные характеристики и т.п.): $dX(t, \bar{u}) / dt = f(X, \bar{q}, \bar{u}, t)$. Функционально – параметрическая модель (ФПМ) [1] описывает эволюцию параметра $X(t, \bar{u})$ в статическом режиме $\bar{u} = \bar{u}_0 = \bar{c} \bar{o} \bar{n} \bar{s} t$, но её

непосредственное употребление для переменных управляющих режимов $\bar{u}(t)$ затруднительно. Модель наследственного типа [1] также призвана описывать эволюцию $X(t, \bar{u})$, но в её достаточно жёсткой структуре заложена возможность использования при переменных управлениях $\bar{u}(t)$. Несколько на особицу модели парциального типа, не использующие в явной форме значение $X(t, \bar{u})$, но построенные на парциальных (относительных) длительностях процесса [1, 2]. Традиционно широко в химической кинетике используются классические кинетические модели и ФПМ, реже парциальные и наследственные, причём имеются случаи одновременного употребления разных типов моделей для описания динамики одной и той же реакции.

Выделение условий выполнения моделей разных типов осуществлялось аналитически [1, 2], но начальный этап состоял из решения обратной задачи. Сначала для различных статических условий $\bar{u}(t)$ проводилось специально разработанными статистическими методами исследование закономерностей изменения характеристик разброса (СКО, коэффициент вариации) длительностей протекания химических процессов или их отдельных стадий в экспериментах с повторностями, т.е. при многократной реализации одного и того же процесса на “идентичных” объектах – носителях процесса при одинаковых внешних условиях. Проведена селекция и верификация выдвинутых ранее эмпирических закономерностей и выделены принципиально важные новые зависимости [1, 2].

Затем на их основе по специально разработанным процедурам аналитически доказано, что ключевую информацию о кинетике процесса доставляют функции пересчёта $\psi(t, \bar{u}_i, \bar{u}_j)$, определяемые соотношением $X(t, \bar{u}_j) = X(\psi(t, \bar{u}_i, \bar{u}_j), \bar{u}_i)$ или функции связи $\phi(t, \bar{u}_i, \bar{u}_j)$ между остаточными длительностями процесса, определяемые соотношением $\phi(t, \bar{u}_i, \bar{u}_j) = \psi(t_j^*, \bar{u}_i, \bar{u}_j) - \psi(t_j^* - t, \bar{u}_i, \bar{u}_j)$, где t_j^* – длительность процесса в условиях $\bar{u}_j$ до полного завершения, т.е. $X(t_j^*, \bar{u}_j) = X^*$ – предельное значение ОП X [1].

Оказалось, что по отношению к четырём перечисленным типам феноменологических детерминированных моделей этим функциям $\psi(t, \bar{u}_i, \bar{u}_j)$ и $\phi(t, \bar{u}_i, \bar{u}_j)$ в силу большей естественности происхождения и удобства работы с ними следует отдать предпочтение при решении проблемы переменного режима [1]. Грубо говоря, именно эти формулы оказались ответственны за решение проблемы переменного режима для задач химической кинетики.

Обозначим через $\phi_\gamma(t)$ квантильную зависимость, полученную из соотношения $F(t, \bar{u}_j) = F(\phi_\gamma(t), \bar{u}_i)$, где $F(t, \bar{u})$ – функция распределения длительностей процесса в режиме $\bar{u}(t)$, причём для квантилей $t_\gamma(\bar{u}_i)$ и $t_\gamma(\bar{u}_j)$ уровня γ имеет место $t_\gamma(\bar{u}_i) = \phi_\gamma[t_\gamma(\bar{u}_j)]$ [2, 9]. Аналогично детерминированному случаю в [2] доказано, что при стохастическом описании

процесса определяющую роль играют функции пересчёта (квантильные зависимости) $\varphi_{ij}(t)$ или, в более узком случае, функциональные зависимости между остаточными длительностями процесса в разных условиях $\bar{u}_j$ (то же, что и в детерминированном случае [1, 2]).

Первоначально задача практического определения квантильных зависимостей, особенно при нескольких действующих факторах, оказалась достаточно сложной, даже на стадии определения их структуры [2]. Пришлось применять специально разработанные статистические процедуры на основе ранговых методов, ибо прямое использование классических регрессионных и дисперсионных методов при решении подобных задач оказалось неэффективным. По мере накопления опыта ситуация стабилизировалась. Обнаружилось подобие структур квантильных зависимостей, полученных по конкретным экспериментальным данным. В качестве характерного примера рассмотрим двухфакторную квантильную зависимость, полученную на представительных выборках при исследовании процесса деструкции сплава для различных уровней $u^1 = T$ (температура) и $u^2 = \sigma$ (напряжение) [2]:

$$t_{\gamma}(\sigma, T) = \alpha(\sigma, T) \cdot \exp \left[\frac{\ln t_{\gamma}(\sigma_1, T_1) \cdot \beta(\sigma, T)}{T^{k_0}} \right], \quad (1)$$

где $\alpha(\sigma, T) = \exp(k_1\sigma + k_2\sigma T + k_3T^{k_4})$, $\beta(\sigma, T) = k_5^T (k_6 + k_7\sigma + k_8T)^{k_9 + k_{10}T}$, причём $\alpha(\sigma_1, T_1) = \beta(\sigma_1, T_1) / T_1^{k_0} = 1$, а режим $\bar{u}_1 = (\sigma_1, T_1)$ выбран в качестве базового.

Если между остаточными временами протекания процесса существует функциональная зависимость, то она с точностью до индекса γ совпадает с квантильной [2] и позволяет соотнести скорости протекания процесса на его одинаковых стадиях, но в разных статических условиях [2]. Так как зависимости получены по результатам массовых экспериментов на “идентичных” объектах-носителях с помощью независимых статистических процедур, то они позволяют при сквозном описании процесса определить место зависимостей типа аррениусовской как частного случая этих квантильных (функциональных) зависимостей либо как некоторого аппроксимирующего соотношения. В частности, вместо знаменитого множителя $1/T$ присутствует обобщение $1/T^{k_0}$. Приложение зависимости (1) к анализу микростадий приводит к тому, что “энергия активации” в её традиционном смысле будет существенно меняться по мере реализации процесса.

Ещё одно интересное следствие из (1) – для этой зависимости несложно выделить области значений (σ, T) , в которых выполняется “компенсационная” зависимость для $\alpha(\sigma, T)$ и $\beta(\sigma, T) / T^{k_0}$, т.е. $\ln \alpha(\sigma, T) \cong A + B \cdot \beta(\sigma, T) / T^{k_0}$, напоминая компенсационную зависимость в законе Аррениуса.

Фактически показано [2], что разброс экспериментальных данных по длительностям протекания стадий химических реакций и, как следствие, по значениям кинетических констант, традиционно воспринимаемый как

мешающий фактор, внутренне присущ любому химическому процессу в силу стохастичности структуры объекта-носителя процесса и, как это ни парадоксально, этот разброс является незаменимым источником информации о закономерностях протекания исследуемого процесса.

Полномасштабный стохастический подход к описанию кинетики химических реакций позволил найти инвариантные детерминированные зависимости между вероятностными характеристиками одного и того же процесса при различных внешних условиях $\bar{u}_i(t)$ его реализации, в частности, статических (изотермических, изобарических и т.п.).

Специфику реализации применяемого подхода поясним на простейшем случае однопараметрического изменения внешних условий. Обозначим через t_{oy}^* и u_{1y}^* – квантили уровня распределений начальной остаточной длительности химического процесса в статическом режиме $u_0(t)$ и динамических условиях $u_1(t) = g(t)$, $\dot{g}(t) > 0$, $g(0) = 0$. При достаточно общих предположениях доказано, что квантильная зависимость $t_{oy}^* = S(u_{1y}^*)$ может быть найдена с помощью вспомогательной функции $t_y = t_y(u_{1ocm})$, определяемой из модельного дифференциального уравнения.

$$\frac{dt_y(u_{1y}^* - x)}{dx} = \left(g'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{\partial \Phi(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=t_y(u_{1y}^* - x)} \right)^{-1} \quad (2)$$

при краевых условиях $t_y(0) = 0$, $t_y(u_{1y}^*) = t_{oy}^*$, причем $t_y(u_{1y}^*) = S(u_{1y}^*)$. Функции пересчета $\Phi(t, u)$ находятся из условия $F(\Phi(t, u), u) = F(t, u_0)$. В структуре (2) отражена как структура динамического режима $u_1(t)$, так и закономерности протекания химического процесса в различных статических условиях $u(t)$. В рамках полученной модели удастся прогнозировать характеристики химического в статических условиях по информации о протекании процесса в динамическом режиме и наоборот, а также рассчитывать такую динамическую стратегию $u_1(t)$, чтобы характеристика химической реакции $X(t, u_1(t))$ изменялась по заданному закону, что важно при оптимизации режимов технологических процессов.

Найденные таким способом квантильные зависимости дали возможность построить функционалы специального вида, позволяющие восстановить квантильные кинетические кривые $X_\alpha(t, \bar{u}(t))$ в веере всех реализаций процесса в условиях $\bar{u}(t)$ по кинетическим кривым $X_\alpha(t, \bar{u}_i)$ этого же процесса, полученным в статических режимах $\bar{u}_i$ (из которых по некоторому закону и составлен $\bar{u}(t)$) и наоборот, а также определить ограничения, при которых такие пересчёты возможны. Эти функционалы стали основой оригинальных процедур верификации и дискриминации моделей химических реакций и

новых способов дискриминации механизмов сложных многостадийных процессов [2].

Помимо этого найденные функционалы позволяют решать задачу определения допустимого программируемого переменного режима $\bar{u}_0(t)$, обеспечивающего изменение характеристики $X(t, \bar{u}_0(t))$ исследуемого химического процесса по наперёд заданной, но допустимой, практически реализуемой траектории.

Разумеется, проводилась апробация обсуждаемой методологии на представительных экспериментальных данных по мере её разработки и по окончании. В работе [2] приведено много примеров, свидетельствующих эффективность предлагаемого подхода. Например, в исследовании [9] приведены медианные траектории процесса вулканизации резины (Compound 19E) при статических температурных условиях $T = 413\text{K}, 423\text{K}, 433\text{K}, 444\text{K}$ и динамических режимах $dT(t)/dt = V = 5, 10, 20, 40\text{K/мин}$. По результатам испытаний при статических управляющих режимах найдены функции пересчета $\psi(z)$ степенного вида к базовому режиму $T = 413\text{K}$, причем для $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ выделился чёткий компенсационный эффект $\ln \alpha(T) = A \cdot \beta(T) + B$. Вид степенной зависимости напоминал (1), но для простоты расчётов использовались линейные аппроксимации.

Показано, что период индукции, предшествующий явному проявлению исследуемого процесса вулканизации, подчиняется тем же закономерностям, что и вторая, видимая стадия. С помощью ПЭВМ на базе обсуждаемых функционалов для всех четырех скоростей наращивания температуры были осуществлены расчёты предельной (на момент завершения процесса) температуры T_i^* , $i = 1, 2, 3, 4$, а также медианные реализации $X(t, u_i(t)) = X(t, T_i(t))$ для динамических управлений $u_i(t) = T_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Сравнение результатов расчётов с экспериментальными (контрольными) траекториями [9] показало, что закономерности исследуемого ВП вулканизации для неизотермических условий выделены с достаточной степенью точности. Например, погрешности в расчётах финишных температур T_i^* , $i = 1, 2, 3, 4$ даже при употреблённых линейных аппроксимациях $\beta(T)$ и $\ln \alpha(T)$ [2] не превысили 5.5% – сказались и устойчивость самого процесса вулканизации в широком температурном диапазоне, и удачная экстраполяция $\beta(T)$ и $\ln \alpha(T)$ на температуры, превышающие 444 K.

Расчётами на базе полученных функционалов объяснён широко известный в топахимической кинетике эффект Смита-Топли (Smith M.L., Topley B. // Proc. Royal Society – 1931. – V. 134A – p224-245) заключающийся в том, что в реакциях дегидратации кристаллогидратов при линейном увеличении внешнего давления скорость процесса дегидратации сначала падает, достигая локального минимума, затем начинает расти, достигая максимума и, наконец, убывает до момента завершения процесса. Сложность

проблемы в том, что при перемене скорости наращивания давления пиковые (экстремальные) точки перемещаются, а при каких-то постоянных скоростях увеличения давления локальный минимум вообще не проявляется. Установлено [1,2], что похожие эффекты в динамической кинетике весьма распространены (например, при линейном росте температуры при терморазложении карбонатов и гидрокарбонатов в атмосфере углекислого газа и паров воды, при терморазложении углерода и др.). До сих пор нет единого мнения в объяснении упомянутого эффекта [2,8]. Некоторые химики - кинетики склоняются к тому, что реакции протекают в несколько стадий и подобные минимумы и максимумы скоростей реакций являются следствием влияния этих стадий. Однако тогда непонятно, почему при некоторых скоростях роста давления (или температуры) фактор многостадийности не проявляется, а при стационарных условиях кривые превращения ведут себя вполне классически – сначала скорость превращения стабильно растёт и, достигнув максимума, плавно убывает до нуля. Показано, что причина рассогласования (несогласия) в модельных объяснениях эффектов типа эффекта Смита-Топли заключается в неучёте математико-кинетических тонкостей во взаимосвязях между скоростями протекания реакции при различных стационарных условиях, как удалось учесть в рамках развиваемой методологии. Оказалось, что проявления эффектов подобного типа возможно и в случае, когда для разных режимов остаются неизменными и последовательность стадий, и механизм протекающего процесса. Появилась возможность ответить на вопрос о наличии и числе минимумов скорости протекания реакции и при каком уровне превращения они будут иметь место. Теоретическое объяснение этих достаточно тонких явлений говорит о возможностях развиваемой теории, а практический выход этого важного результата очевиден – можно рассчитать такую оптимальную управляющую стратегию $\bar{u}(t)$, чтобы реакция протекала с наивысшей скоростью, экономя время, энергоресурсы, сырьё и т.д.

Обсуждение. Конечно, создание макромоделей процесса невозможно без проведения эксперимента и обработки его результатов, но какова должна быть программа такого эксперимента? Только интегральный комплексный подход [2] к решению этой проблемы, начиная с новой идеологии анализа экспериментальных данных, акцент на решение обратной задачи на базе вновь разработанных математических методов, позволяет ответить на эти принципиальные вопросы, а также говорить о ликвидации кризиса формально-кинетического подхода. Кризис этот обусловлен определённой изолированностью химической кинетики от методов решения сходных задач в других областях знания, что привело к её недостаточной стохастизации. (Кстати, такие же кризисы сейчас коснулись не только химической кинетики). Справедливость сказанного подтверждает то, что разработанный именно на стохастической основе метод [2] снимает все известные автору несоответствия и рассогласования, имеющие место в современной химической кинетике.

Среди достаточно неожиданных общих аналитических итогов работы – констатация отсутствия безусловной необходимости протоколирования закономерностей реализации химического процесса в виде привычных кинетических моделей классического типа или ФПМ при решении ряда важных задач, особенно при расчётах динамики процесса в переменных режимах. Более того, эти формы записи мешали совершить качественный скачок при попытках связать характеристики химического процесса в статических и динамических режимах реализации. Вся необходимая исследователю информация аккумулируется в квантильных (функциональных) зависимостях $\Phi(z, \bar{u}_i, \bar{u}_j)$. При этом уходят на второй план проблемы планирования дискриминирующих и идентифицирующих экспериментов для классических кинетических моделей или ФПМ, в частности, статистическими методами.

В силу того, что развиваемый вероятностно – статистический подход обладает возможностью доставлять информацию о структурных изменениях в объекте-носителе реакции в разных статических и динамических условиях через знание совпадения и несовпадения механизмов процесса, последовательности стадий (микростадий) процесса, соотнесение их длительностей в разных условиях и т.п., его едва ли следует относить к феноменологическим в традиционном смысле. Он уже более тяготеет к точным методам структурного анализа.

И, наконец, если введение в употребление закона Аррениуса знаменовало переход от описательной химии к полуколичественной [3], то использование квантильных (функциональных) зависимостей даёт химии вполне корректное количественное описание, составляющее отдельный сугубо математический раздел этой науки

Список литературы

1. Белов В.Н. Математические модели временных процессов. I. Детерминированные модели временных процессов в разных областях науки и техники. – Волгоград: Политехник, 2002. – 320с.
2. Белов В.Н. Математические модели временных процессов. II. Стохастические модели временных процессов в разных областях науки и техники. – Волгоград: Политехник, 2002. – 216с.
3. Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. – М.: Мир, 2000. – 176с.
4. Тимашев С.Ф. Наука о “сложном”: феноменологическая основа и возможности приложения к решению проблем химической технологии. //Теоретические основы химической технологии. – 2000. – № 4 – с.339 – 352.
5. Мелихов И.В. Концепция случайности в химии и многозначность результатов химического эксперимента. //Теоретические основы химической технологии. – 2000. – № 4 – с.353–363.

6. Мержанов А.Г. Неизотермический метод в химической кинетике. // Физика горения и взрыва. –1973. – т.9, № 1 – с.4-36.
7. Bogdanoff J., Kozin F. *Probabilistic. Models of Cumulative Damage*. – N.-Y.: Wiley, 1985. – 342p.
8. Фяллко М.Б. Неизотермическая кинетика в термическом анализе. – Томск: ТГУ, 1981. – 110с.
9. Белов В.Н. Квантильные зависимости в химической кинетике. // Новые технологии в промышленности и образовании. – Камышин: КТИ ВолгГТУ, 2003. – с.165–167.
10. Тёмкин О.Н. Современные проблемы кинетики сложных реакций. // Российский химический журнал. – 2000. – № 4 – с.58 –65.
11. Chan T.W., Shyu G.D., Isayev A.I. Reduced Time from Nonisothermal Data. // *Rubber Chemistry and Technology*. – 1994.–V.67, № 2 – p.314 –328.

О ПОСТРОЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.Б. Белуха

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Ортогональное планирование есть такое планирование, когда при построении планов первого порядка [1] матрица X строится таким образом, чтобы матрица $C=X^T X$ оказалась диагональной. При построении плана второго порядка сохраним в силе этот же принцип организации матрицы X . Будем рассматривать лишь ортогональный центрально-композиционный план второго порядка (ОЦКП), хотя, как показано в [2, 3], этот план далеко не всегда оптимален при решении задач. Для задач первой группы ортогональный план второго порядка весьма удобен, так как он позволяет очень просто найти коэффициенты. В ортогональном плане второго порядка (ОЦКП) к ядру, представляющему собой план полный факторный эксперимент (ПФЭ) 2^n , добавляются центральная точка ($x_i = 0, i=1, 2, \dots, n$) и по две «звездные» точки для каждого фактора ($x_i = \pm\alpha, x_j = 0; j \neq i$). При этом в каждой плоскости, проходящей через центр и содержащей ось Y и координатную ось i -го фактора, оказываются три значения фактора x_i ($-\alpha, 0, +\alpha$) и три соответствующих значения Y . Общее число опытов в ортогональном плане второго порядка составит: $N = 2^n + 2n + 1$, т.е. будет существенно меньше, чем, например, в плане ПФЭ 3^n при $n > 2$. Чтобы матрица планирования второго порядка была ортогональной, необходимо, выполнение условия

$$\sum_{u=1}^N x_{0u} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} = 0 \quad (1)$$

для любых $j \neq 0$, в частности для значений j , соответствующих квадратам факторов. Очевидно, что выполнить это условие можно лишь в том случае, если указанные члены (квадраты факторов) подвергнуты некоторому преобразованию, так как в противном случае сумма положительных чисел не может быть равной нулю. Обозначив преобразованные факторы через x'_{ju} , можно записать: $x'_{ju} = x_{ju}^2 - a$, где a – постоянная, не зависящая от u . Подставив последнее выражение в (1), получим:

$$\sum_{u=1}^N x'_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju}^2 - Na = 0, \quad a = \frac{\sum_{u=1}^N x_{ju}^2}{N} = \bar{x}_j^2$$

Окончательно для преобразованных квадратичных членов будем иметь:

$$x'_{ju} = x_{ju}^2 - \bar{x}_j^2. \tag{2}$$

Другим условием диагональности матрицы C будет равенство нулю элементов, расположенных не на главной диагонали, и, в частности, элементов, соответствующих преобразованным квадратичным членам:

$$\sum x'_{iu} x'_{ju} = 0. \tag{3}$$

Это условие будет выполнено при величинах звездного плеча α , приведенных в табл. 1.

Таблица 1

n	2	3	4	5
α	1,000	1,215	1,414	1,547

Матрица планирования, построенная с соблюдением указанных условий, будет ортогональной. В табл. 2 в качестве примера приведен ортогональный план второго порядка для трех факторов. Отметим, что в данном случае звездные точки находятся вне исходной области планирования.

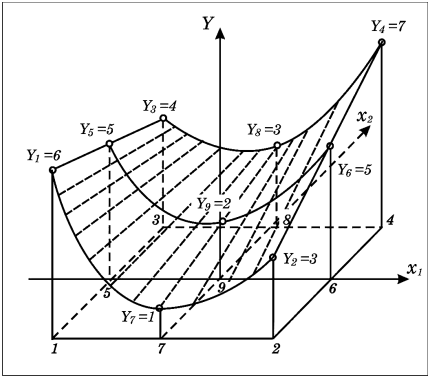


Рис. 1. Поверхность отклика ортогонального плана второго порядка.

Таблица 2

	<i>u</i>	<i>x_i</i>									
		<i>x₀</i>	<i>x₁</i>	<i>x₂</i>	<i>x₃</i>	$\bar{x}_4 = \bar{x}_1^2$ -0,73	$\bar{x}_5 = \bar{x}_2^2$ -0,73	$\bar{x}_6 = \bar{x}_3^2$ -0,73	$\bar{x}_7 = \bar{x}_1$ <i>x₂</i>	$\bar{x}_8 = \bar{x}_1$ <i>x₃</i>	$\bar{x}_9 = \bar{x}_2$ <i>x₃</i>
План ПЭФ2 ³	1	+1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1
	2	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1
	3	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1
	4	+1	+1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1
	5	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1
	6	+1	+1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1
	7	+1	-1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1
	8	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1
«Звездные» точки	9	+1	-	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0	0	0
	10	+1	1,215	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0	0	0
	11	+1	+1,2	-	0	-0,73	0,75	-0,73	0	0	0
	12	+1	15	1,215	0	-0,73	0,75	-0,73	0	0	0
	13	+1	0	+1,2	-	-0,73	-0,73	0,75	0	0	0
	14	+1	0	15	1,215	-0,73	-0,73	0,75	0	0	0
	15	+1	0	0	+1,2	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0
Нулевая точка			0	0	15						
			0	0	0						

Коэффициенты полинома $Y = \sum_{i=0}^m b_i x_i$ будут определяться по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} Y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}, \quad (4)$$

и полином с учетом преобразованных квадратичных членов приобретает вид:

$$Y = b'_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{11}(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1^2) + \dots + b_{nn}(\bar{x}_n^2 - \bar{x}_n^2) + b_{12} x_1 x_2 + \dots \quad (5)$$

Для перехода к обычному виду нужно раскрыть скобки и определить b_0 :

$$b_0 = b'_0 - b_{11} \bar{x}_1^2 - \dots - b_{nn} \bar{x}_n^2. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь очень простой пример, иллюстрирующий применение изложенного аппарата. Пусть поверхность, уравнение которой

нас интересует, имеет вид, показанный на рис. 1. Начнем с плана ПФЭ 2^2 (табл. 3, первые четыре строки):

Таблица 3

u	x_i					
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	Y	$\hat{Y}$
1	+	–	–	+	6	6
2	+	+	–	–	3	3
3	+	–	+	–	4	4
4	+	+	+	+	7	7
5	+	0	0	0	2	5

Найдем коэффициенты b_i по (4): $b_0=5$; $b_1=0$; $b_2=0,5$; $b_{12}=1,5$. Отсюда функция отклика примет вид $Y=5+0,5x_2+1,5x_1x_2$. Очевидно, что поверхность, соответствующая этому полиному проходит через четыре точки $(Y_1,...,Y_4)$, по которым определены коэффициенты, однако, поставив опыт в нулевой точке (пятая строка в табл. 3), убеждаемся, что полученная аппроксимация не очень хороша: $|Y-\hat{Y}|=3$.

Достраиваем план до ортогонального плана второго порядка: к четырем опытам ПФЭ 2^2 добавляем четыре опыта в «звездных» точках при $\alpha=1$ (см. табл. 1) и уже сделанный опыт в нулевой точке. Квадратичные члены преобразуем по формуле (2), для чего находим $\overline{x_j}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Теперь у нас есть возможность построить таблицу, аналогичную табл. 2, но содержащую лишь девять строк – см. табл. 4.

Таблица 4

u	x_i							
	x_0	x_1	x_2	$x_3=x_1^2-\frac{2}{3}$	$x_3'=x_1^2-\frac{2}{3}$	$x_5=x_1 x_2$	Y	$\hat{Y}$
1	+1	–1	–1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	+1	6,00	5,83
2	+1	+1	–1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	–1	3,00	2,83
3	+1	–1	+1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	–1	4,00	4,17
4	+1	+1	+1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	+1	7,00	7,17
5	+1	–1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	5,00	5,00

6	+1	+1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	5,00	5,00
7	+1	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1,00	1,33
8	+1	0	+1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3,00	2,67
9	+1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	2,00	2,00

В столбец Y табл. 4 мы вписали все значения Y , полученные в опытах (рис. 1). Найдем коэффициенты по (4):

$$b'_0 = \frac{6+3+4+7+5+5+1+3+2}{9} = \frac{36}{9} = 4; \quad b_1 = \frac{-6+3+4-7-5+5}{6} = 0;$$

$$b_2 = \frac{-6-3+4+7-1+3}{6} = 0,67;$$

$$b_{11} = \frac{\frac{1}{3}(6+3+4+7+5+5) - \frac{2}{3}(1+3+2)}{6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10-4}{2} = 3; \quad b_{12} = \frac{6-3-4+7}{4} = 1,5.$$

Полученный полином имеет вид:

$$Y = 4 + 0,67x_2 + 3\left(x_1^2 - \frac{2}{3}\right) + 1,5x_1x_2, \text{ или } Y = 2 + 0,67x_2 + 3x_1^2 + 1,5x_1x_2.$$

Значения функции, вычисленные по полученному полиному, приведены в столбце Y табл. 4. Здесь мы имеем возможность констатировать, что они близки к значениям, которые дал опыт. Рассмотрим теперь замену факторов X_i на новые независимые переменные $\xi_i = \rho(X_i)$ [4, 5]. Здесь речь идет об истинных значениях факторов, которые мы обозначаем заглавными буквами X . Идея преобразования факторов очень проста и может быть проиллюстрирована на простейшем примере. Пусть искомая функция имеет вид $Y=X^3$ и определена на отрезке $1 \leq X \leq 3$. Очевидно, что попытка аппроксимировать эту функцию полиномом первой степени относительно X обречена на неудачу: прямая, проходящая через крайние точки, $Y = -12 + 13X$ плохо аппроксимирует исходную зависимость, что легко устанавливается вычислением разности $Y - \hat{Y}$ при $X = 2$ ($|Y - \hat{Y}| = 6$). Введя новую переменную $\xi = X^3$, обнаруживаем, что зависимость $Y = \xi$ линейна и, следовательно, точно описывается полиномом первой степени относительно ξ .

Итак, задача состоит в нахождении новых переменных ξ , функционально связанных с факторами X . В общем виде решение этой задачи весьма сложно и может быть выполнено различными способами, однако для ряда фактически важных случаев она может быть решена при использовании преобразования вида [4]:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= X_i^{\alpha_i} \quad (\alpha_i \neq 0); \\ \xi_i &= \ln X_i \quad (\alpha_i = 0). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

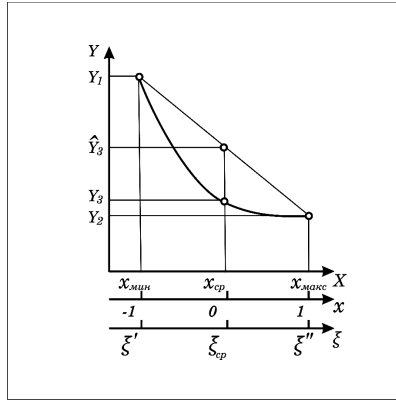


Рис. 2. К преобразованию факторов.

Применение в качестве преобразованной переменной степенной функции исходного фактора целесообразно в связи с тем, что степенная функция при надлежащем выборе α весьма близко аппроксимирует нелинейные зависимости параболического и гиперболического вида. Параметры преобразования могут быть найдены на основе итерационной процедуры, предложенной Боксом и Тайдуэллом [4], однако этот путь весьма трудоемок и вряд ли получит распространение в инженерных приложениях. Для случая, когда величины Y в опытах определяются без погрешности, можно использовать простой способ, позволяющий найти константы α ; из условия, что кривая $Y = f(X_i)$ (некоторое сечение исследуемой гиперповерхности) проходит через три известные точки.

Будем полагать, что функция $Y = f(X_i)$ монотонна и определена на отрезке $[X_{\min}, X_{\max}]$, причем $X_{\min} \geq 0$ (рис. 2). Введя кодированную переменную x_i (индекс i далее опущен) в соответствии с

$$x_i = \frac{X_i - X_{\text{иср}}}{X_{\text{иср}} - X_{\text{мин}}} = \frac{X_i - X_{\text{иср}}}{X_{\text{макс}} - X_{\text{иср}}} = \frac{2X_i - X_{\text{макс}} - X_{\text{мин}}}{X_{\text{макс}} - X_{\text{мин}}}, \quad (8)$$

получим уравнение прямой, проходящей через крайние точки ($x_{\min} = -1$ и $x_{\max} = +1$):

$$Y = b_0 + b_1 x; \quad b_0 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}; \quad b_1 = \frac{-Y_1 + Y_2}{2}. \quad (9)$$

Для проверки адекватности находим значение Y_3 для $X=X_{\text{ср}}$ ($x=0$) и определяем $Y_3 - \hat{Y}_3 = Y_3 - b_0$. Если выражение (9) неадекватно ($Y_3 - b_0 \neq 0$) и Y_3 лежит между Y_1 и Y_2 (функция согласно имеющейся информации монотонна), то поставим задачу найти такое значение, чтобы функция

$$Y = C_0 + C_1 X^\alpha \quad (10)$$

проходила через все три известные точки.

Отметим, что выражение (9) не изменится при замене фактора – станет другим лишь выражение для кодированной переменной:

$$x = \frac{\xi - \xi_{cp}}{\xi'' - \xi'} = \frac{2\xi - \xi'' - \xi'}{\xi'' - \xi'} \quad \text{или} \quad x = \frac{2X^\alpha - X_{\max}^\alpha - X_{\min}^\alpha}{X_{\max}^\alpha - X_{\min}^\alpha} \quad (11)$$

Тогда при подстановке в (9) координат средней точки (X_{cp} , Y_3) с учетом (11а) получим:

$$Y_3 = b_0 + b_1 \left(\frac{2X^\alpha - X_{\max}^\alpha - X_{\min}^\alpha}{X_{\max}^\alpha - X_{\min}^\alpha} \right) \quad (12)$$

или после преобразований, учитывая, что $X_{cp} = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$, получим

$$c = \frac{2^{1-\alpha}(a+1)^\alpha - a^\alpha - 1}{a^\alpha - 1}, \quad (13)$$

где

$$c = \frac{Y_3 - b_0}{b_1}; \quad (14)$$

$$a = \frac{X_{\max}}{X_{\min}}. \quad (15)$$

Уравнение (13) позволяет находить α в каждом конкретном случае. Для удобства на рис. 3 приведены зависимости $\alpha = \varphi(c)$ при $a = \text{const}$, позволяющие определить α при известных a и c .

Для нахождения констант преобразования α_1 и α_2 получим два сечения поверхности, проходящие через центр (строки 6-9 в табл. 5), показанные на рис. 4. Отметим, что эта операций в точности соответствует проведению дополнительных опытов в «звездных» точках при планировании второго порядка. Применив к полученным сечениям описанную выше процедуру, будем иметь:

$$\begin{aligned} b_{0(1)} &= \frac{14+10}{2} = 12; & b_{0(2)} &= \frac{3,667+22,330}{2} = 12,998; \\ b_{1(1)} &= \frac{-14+10}{2} = -2; & b_{1(2)} &= \frac{-3,667+22,330}{2} = 9,331; \\ c_{(1)} &= \frac{10,667-12}{-2} = 0,667; & c_{(2)} &= \frac{10,667-12,998}{9,331} = -0,25; & a_{(1)} &= \frac{5}{1} = 5; & a_{(2)} &= \frac{3}{1} = 3. \end{aligned}$$

По кривым (рис. 1-9) находим $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_2 = 2$, т. е. $\xi_1 = X_1^{-1}$ и $\xi_2 = X_2^2$. Для получения полинома с новыми независимыми переменными находим их значения в крайних точках, а также ξ_{cp} (рис. 1-10), записываем новые выражения для x_i :

$$x_1 = \frac{\xi_1 - 0,6}{-0,4}; \quad x_2 = \frac{\xi_2 - 5}{4}.$$

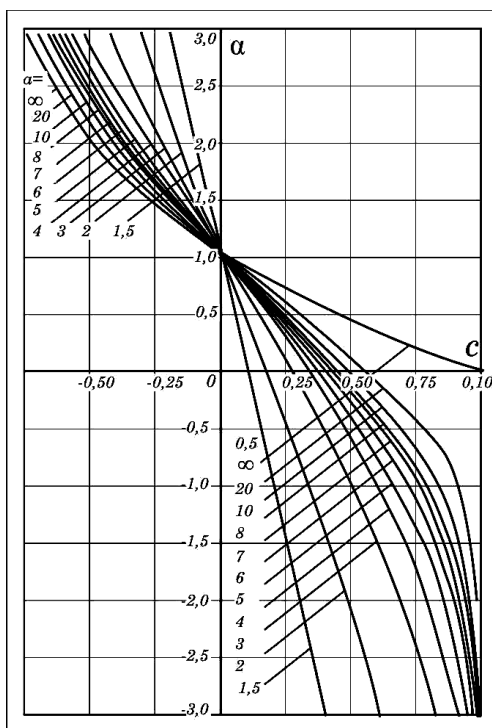


Рис. 3. Зависимости $\alpha=\varphi(c)$ при $a=\text{const}$ для определения параметров преобразования факторов.

Опыт в центральной точке ($X_1=X_2=0$) дает $Y_5=10,667$ (строка 5), и расхождение $|Y_5 - \hat{Y}_5| \approx 3,9$ весьма велико.

Таблица 5

u	x_i		
	x_1	x_2	Y
1	—	—	5,0
2	+	—	3,4
3	—	+	29,0
4	+	+	21,0
5	0	0	10,667
6	—	0	14,0
7	+	0	10,0
8	0	—	3,667
9	0	+	22,33

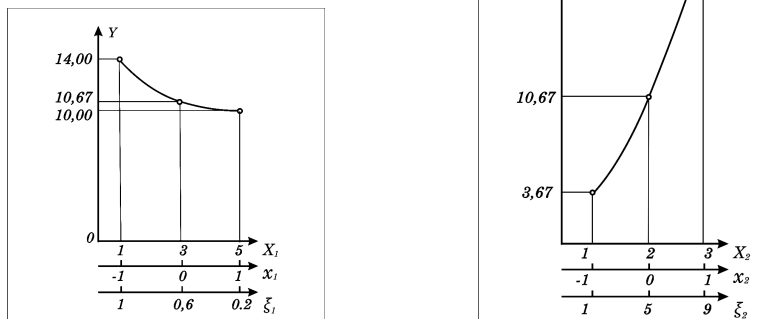


Рис. 4. Сечения поверхности $Y=f(X)$ в примере преобразовании факторов.

Подставив полученные величины в (17), после элементарных преобразований получим:

$$Y = 1 + \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_1\xi_2.$$

Это выражение точно соответствует исходной функции (16).

Изложенный способ прост, нагляден и дает удовлетворительные результаты, если функция не имеет экстремумов, а опыты не содержат значительных погрешностей. Для проверки адекватности найденного полинома можно реализовать дополнительные опыты, например, в точках с координатами $x_i = \pm 0,5$.

Изложенная процедура замены факторов может рассматриваться как прием, позволяющий компенсировать недостаточность информации об искомой функции перед началом работы с ней. Действительно, если бы исследователь, начиная решать последний пример, знал, что фактор X_1 входит в уравнение искомой функции в виде X_1^{-1} , а фактор X_2 в виде X_2^2 , то у него была бы возможность уже на стадии выбора факторов учесть эту информацию и выбрать в качестве факторов не X_1 и X_2 , а $\xi_1 = X_1^{-1}$ и $\xi_2 = X_2^2$. На практике, однако, такая информация доступна далеко не всегда, и изложенная процедура преобразования факторов позволяет в какой-то мере восполнить этот пробел. Разумеется, вполне возможна ситуация, когда преобразование факторов не дает полезного эффекта. В таких случаях придется использовать другие, более трудоемкие пути получения адекватной модели.

Список литературы

1. *Ивоботенко Б.А., Ильинский Н.Ф., Копылов И.П.* Планирование эксперимента. - М., «Энергия», 1975.
2. *Налимов В.В., Чернова Н.А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. - М., «Наука», 1965.
3. *Налимов В.В., Голикова Т.П.* Логические основания планирования эксперимента. - М., Изд-во МГУ, 1971.
4. *Box G.E.P., Tidwell P.W.* Transformation of the independent variables. – «Technometrics», 1962, v.4, № 4, p. 531-550.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБРАЗЦОВ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ИХ РАЗМЕРОВ

А.А. Сиделёв, В.Н. Белов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

При исследовании закономерностей необратимого процесса накопления повреждений в испытываемом твёрдом теле представляет большой теоретический и практический интерес объяснение причин существования явления масштабного (размерного) эффекта, на макроуровне заключающего в уменьшении удельных прочностных характеристик образцов с ростом их размеров (при сохранении вида напряжённого состояния образца). Анализ многочисленных публикаций, посвященных этой проблеме, показал, что ни одна из существующих моделей, в том числе и широко известная модель Вейбулла, не позволяет оценить степень разброса характеристик динамической прочности σ образцов с увеличением их длины (для образцов стандартной конфигурации), либо прогноз оставляет желать лучшего [1]. При этом исследователи столкнулись с тем фактом, что наблюдается чёткое уменьшение средней прочности объектов (математического ожидания – MX) с увеличением их длины, но в то же время характеристика разброса (коэффициент вариации – Cv) в большинстве случаев ведёт себя весьма нестабильно. Особенно это проявляется в тех экспериментах, где объекты для исследований в целях обеспечения чистоты эксперимента отбирались случайным образом [1 - 4].

Авторами настоящего доклада было высказано предположение, что как раз именно процедура случайного отбора объектов играет первоочередную роль в нестабильном поведении Cv . Для подтверждения этой гипотезы был проведён ряд экспериментов (с медной проволокой, хлопчатобумажной нитью), в которых образцы отбирались по специальной процедуре. Одновременно обсуждаемая гипотеза проверялась расчётами на имитационной модели.

Основной целью данной работы является создание стохастической прочностной модели для образцов сравнительно простой конфигурации, позволяющей при увеличении длины образца адекватно прогнозировать как уменьшение средней динамической прочности, так и изменение меры его разброса – Cv .

В предлагаемой имитационной модели изменение динамической прочности σ по длине объекта рассматривается как реализация некоторого случайного процесса (СП) $\eta(t)$, где вместо обычного времени t используется координата соответствующей точки объекта ($t \in [0, l]$, l – длина образца). В ней заложены два важнейших предположения:

1. Разрыв образца происходит в том месте, где прочность минимальна (модель слабейшего звена).
2. Между прочностными характеристиками соседних участков (микроучастков) существует связь.

Сложность решаемой задачи как раз и проявилась в том, что оба используемых предположения отнюдь не новы [3] и только аккуратный статистический анализ обширного набора экспериментальных данных, собранных из более чем 400 источников [1], позволил выделить новые достаточно тонкие закономерности (например, в поведении коэффициента вариации с ростом длины образца), доставившие возможность усовершенствования моделирующего алгоритма.

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ СП $\eta(t)$

1. По результатам эксперимента была построена эмпирическая автокорреляционная функция (АКФ) и выбран класс АКФ для алгоритма моделирования.

2. По методу наименьших квадратов оценивались параметры α и ω АКФ $R(\tau) = \sigma_1^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$.

3. Моделировался гауссовский СП (однородный стационарный эргодический) $\xi(t)$ с указанной АКФ.

4. Безынерционным преобразованием $\eta(t) = \psi(\xi(t))$ строился негауссовский СП $\eta(t)$. Показано, что в качестве функции преобразования $\psi(\xi)$ достаточно использовать четырёхпараметрическую степенную зависимость вида $A = (\xi(t) + D)^k + B$. Параметры A , B , k , D оцениваются по экспериментальным данным.

С помощью описанной имитационной модели удалось на основании данных о прочности отрезков хлопчатобумажной нити малой длины 3 см осуществить достаточно точный прогноз на большие другие длины – 6, 9, 18, 30 и 51 см. (Эксперимент по специальной программе проводился авторами). Максимальная погрешность прогноза по среднему значению динамической прочности MX составила – 1.5%, по Cv – 9%. Опыт работы с предложенной имитационной моделью показал, что хорошее качество прогноза достигается

уже в том случае, когда значения четырёх характеристик – $M\bar{X}$ (среднее), C_v (коэффициент вариации), A_s (коэффициент асимметрии), E_x (эксцесс) – экспериментальной и расчётной выборки для трёхсантиметровых отрезков оказываются совпадающими.

При обработке данных о динамической прочности медной проволоки (в работе использовались результаты собственных экспериментов 5, 10, 20 и 40 см отрезков) качество прогноза оказалось ещё лучше – расхождение в прогнозах $M\bar{X}$ и C_v не превышало 1%, что является весьма впечатляющим результатом.

Помимо этого, используя данные о прочности 10-метровых отрезков оптоволоконной нити [2] удалось получить не только хороший прогноз $M\bar{X}$ и C_v для длин 20, 30, 40, 50 м, но и достаточно точный прогноз нагрузки, при которой происходит разрыв 10 процентов стеклонитей от общего количества образцов длиной 1100 метров (погрешность составила менее 15%) [2].

В рамках предложенной имитационной модели выявлено, что значение C_v динамической прочности возрастает до определенной длины образцов, а затем начинает убывать. Такое же поведение C_v впервые обнаружено авторами в собственном эксперименте. Стало ясно, что именно такое несколько неожиданное поведение коэффициента вариации и явилось причиной многочисленных недоразумений при интерпретации другими авторами результатов похожих экспериментов [4]. На рисунке 1 представлено прогнозное поведение C_v динамической прочности для хлопчатобумажной нити на большие длины, которые откладывались по оси абсцисс и измерялись в метрах.

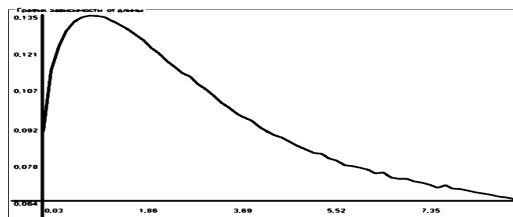


Рис.1 Зависимость C_v от длины образца.

Предлагаемая модель также была использована для оценки влияния на достоверность получаемых экспериментальных данных зажимной длины образца (та часть образцам. Показано, что если зажимная длина с каждой стороны образца составляет не более 1/17 длины образца, то её влиянием на значения параметров АКФ можно пренебречь. Также установлено, что в случае наличия зажимных длин реальные значения параметров АКФ (α и ω) меньше наблюдаемых. Отношения их расчётных значений к истинным

приведены в Табл. 1 (считаем, что на зажим с каждой стороны образца (отрезка нити) использовано по 1 единице его длины).

Длина отрезка	Таблица 1				
	1 ед.	2 ед.	4 ед.	6 ед.	8 ед.
Отношение: α	2.89	1.96			
ω	2.91	1.91			
			1.48	1.32	1.23
			1.47	1.32	1.21

В то же время однозначного влияния на характеристики MX , Cv , As , Ex зажимной длины не выявлено.

В рамках обсуждаемой модели с увеличением длины образца в 2 раза значение параметра ω увеличивается в 2 раза (что и следовало ожидать!), параметр α в среднем также увеличивается примерно в 2 раза.

Несовпадение между расчётными (смоделированными) и экспериментальными значениями As и Ex для опорной длины образца существенно сказывается на качестве прогноза MX и Cv на большие длины. Если совпадения добиться не удастся, то:

в случае $As < 0$ необходимо, чтобы расчетное значение As было меньше экспериментального, а Ex больше либо наоборот. Если $Ex < 0$, то при подборе параметров необходимо обеспечить, чтобы ошибка в определении значения Ex не превосходила $0.6\Delta As$, а при $Ex > 0$ ошибка в определении значения As не превосходила $0.7\Delta Ex$;

в случае $As > 0$ необходимо обеспечить, чтобы ошибка в определении значения As не превосходила $0.4\Delta Ex$.

Объём каждой из экспериментальных выборок в опытах с хлопчатобумажной нитью и медной проволокой равнялся 200 образцам. Для того чтобы оценить минимальный объём выборки, необходимый для получения стабильных экспериментальных результатов, были проведены дополнительные исследования, в том числе на имитационной модели. На рисунках 2 - 5 показано поведение исследуемых характеристик - MX , Cv , As , Ex - для хлопчатобумажной нити длиной 3 см при росте числа испытываемых образцов (по оси абсцисс отложено число образцов).

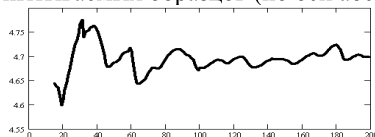


Рис. 2. Поведение MX

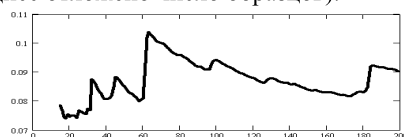


Рис. 3. Поведение Cv

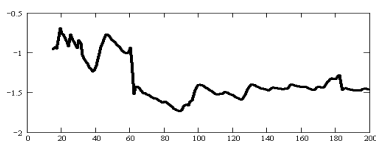


Рис. 4. Поведение A_s

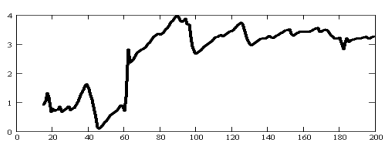


Рис. 5. Поведение E_x

Аналогичные исследования, проведенные и для других материалов, показали, что объём выборок, используемых для прогноза динамической прочности объектов на большие длины, не должен быть меньше 80 элементов.

Список литературы

1. Белов В.Н. Стохастические модели временных процессов в разных областях науки и техники. – Волгоград: Политехник, 2002. – 216с.
2. Taryal B.K., Kalish D. Mechanical Behavior of Optical Fiber // Fracture Mechanics of Ceramics. – 1978. – Volume 3. – p. 161-175.
3. Лидбеттер М., Потсен Х., Линдгрен Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392с.
4. Fengjun Shi, Jinlian Hu. The Effect of Test Length on Strength of Cotton Yarns // Research Journal of Textile and Apparel - 2001 - Vol. 5, No. 1 – p.18-25.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ В МОДЕЛИ КОКСА ОТ ФАКТОРА НАГРУЗКИ

М.А. Ермолаева

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

В настоящем докладе исследуется проблема непараметрического анализа связей между характеристиками надежности технических устройств при их функционировании в различных условиях. Задача определения зависимости между показателями надежности изделий возникает, во-первых, при определении показателей надежности методами форсированных испытаний; во-вторых, при исследовании связи между функциями распределения наработок аналогичных приборов в разных условиях эксплуатации.

В настоящее время наблюдается тенденция к решению подобных задач методами непараметрической статистики [1]. Причина этого заключается в том, что в реальности обычно неизвестен вид функции распределения наработок до отказа, который к тому же может меняться в разных условиях функционирования изделий. Все большее распространение получают

методы оценки непараметрической регрессии, основанные на моделях Кокса-Лемана [2]. Суть их заключается в анализе степенных связей между функциями распределения или функциями надежности наработок изделий в разных режимах. Разработаны численные методы оценки параметров регрессионных зависимостей вида $F_i(t) = [G(t)]^{k_i}$ или $1 - F_i(t) = [1 - G(t)]^{k_i}$, где $F_i(t)$ - функция распределения наработок до отказа в i -ом режиме эксплуатации, k_i зависит от факторов, влияющих на время работы устройства.

Заметим, что коэффициенты k_i обычно зависят от внешних факторов по одному из законов: $k_i = e^{\beta x_i}$, $k_i = a + bx_i$. Здесь рассмотрен случай одного фактора, однако обобщение на случай нескольких не представляет затруднений. В докладе рассматривается экспоненциальная модель как наиболее распространенная и применяющаяся в различных областях техники, медицины и социологии. Последовательность изложения следующая: сначала рассматривается статистический критерий, на базе которого будет проводиться оценка экспоненциальной зависимости, затем изложен алгоритм, позволяющий оценивать неизвестный параметр β .

1. Рассмотрим сначала задачу проверки справедливости степенных зависимостей между функциями распределения выборок [3].

Она является обобщением классической задачи проверки однородности нескольких выборок. Для случая двух выборок подобный критерий, проверяющий степенную зависимость между функциями распределения, был предложен Тимониним В.И. [4].

Постановка задачи. Обозначим $\bar{\xi}_i = (\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$ - независимые выборки из наработок изделий в разных режимах, где $\xi_j^i \sim F_i(t)$, $i = \overline{1, q}$; $n = \sum_{i=1}^q n_i$.

Требуется проверить гипотезу:

$$H_0 : F_1^{k_1}(t) = \dots = F_q^{k_q}(t) \quad (1)$$

где k_i - известные числа. Без ограничения общности можно считать, что $k_i \geq 1$, $i = \overline{1, q}$. В случае $k_i = 1$, $\forall i$ гипотеза является классической гипотезой однородности.

Вид предлагаемой статистики.

Для проверки (1) предлагается использовать статистику вида:

$$T_k^2 = \max_t \frac{\sum_{i=1}^q n_i (\hat{F}_i^{k_i} - \bar{F})^2 + \bar{F} \cdot (\Phi \sqrt{q-1} - \Phi_1)}{\Gamma^2} \quad (2)$$

Здесь $\hat{F}_i(t)$ - эмпирическая функция распределения i -ой выборки;

$$\rho_i = \frac{n_i}{n}; \quad \bar{F} = \sum_{i=1}^q \rho_i \cdot \bar{F}_i^{k_i}(t); \quad \Gamma = \bar{F} + \Phi / \sqrt{q-1}; \quad \Phi_1 = \sum_{i=1}^q k_i^2 (1 - \rho_i) \bar{F}_i^{1-k_{0i}} (1 - \bar{F}_i^{k_{0i}});$$

$$\Phi = \left[\left(\sum_{i=1}^q k_i^2 \rho_i \bar{F}_i^{1-k_{0i}} (1 - \bar{F}_i^{k_{0i}}) \right)^2 + \sum_{i=1}^q k_i^4 \bar{F}_i^{1-k_{0i}} (1 - \bar{F}_i^{k_{0i}})^2 (1 - 2\rho_i) \right]^{1/2}.$$

В [4] показано, что без ограничения общности можно считать, что для непрерывных $F_i(t)$ распределение статистики (2) не зависит от вида $F_i(t)$.

Поэтому можно считать, что $F_i(t) = t^{k_{0i}}$, $0 \leq t \leq 1$, $k_{0i} = \frac{1}{k_i}$.

Распределение статистики T_k^2 при справедливости проверяемой гипотезы.

Общий метод вычисления точных распределений многовыборочных статистик типа Колмогорова – Смирнова для гипотезы (1) был получен в работе [6]. По этой причине теорема, дающая метод вычисления точных распределений T_k^2 при справедливости гипотезы (1) приводится без доказательства.

Теорема 1. Вероятность $P(T_k^2 < h)$ равна величине $\pi_{n_1, n_2, \dots, n_q}(h)$, которую можно определить повторным применением соотношения

$$\pi_{i_1, i_2, \dots, i_q}(h) = \left(\pi_{i_1-1, i_2, \dots, i_q}(h) i_1 k_{01} + \dots + \pi_{i_1, i_2, \dots, i_q-1}(h) i_q k_{0q} \right) \cdot \frac{\chi_{i_1, i_2, \dots, i_q}(h)}{\sum_{j=1}^q i_j k_{0j}} \quad (3)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\pi_{0, \dots, 0}(h) = 1, \quad \pi_{-1, 0, \dots, 0} = \dots = \pi_{0, \dots, 0, -1} = 0.$$

$$\text{Здесь } \chi_{i_1, i_2, \dots, i_q}(h) = \begin{cases} 1, & \omega_{i_1, i_2, \dots, i_q} < h, 0 \leq i_j \leq n_j \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}, \quad \omega_{i_1, i_2, \dots, i_q} = A_{i_1, i_2, \dots, i_q} / B_{i_1, i_2, \dots, i_q}.$$

Введем дополнительную переменную:

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_q} = \left(\sum_{j=1}^q k^2 j \rho_j \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{1-k_{0j}} \left(1 - \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{k_{0j}} \right) \right)^2 +$$

$$+ \sum_{v=1}^q k^4 \left(1 - \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{k_{0j}} \right)^2 (1 - 2\rho_v) \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^{2-2k_{0j}}.$$

Тогда $A_{i_1, i_2, \dots, i_q}$ и $B_{i_1, i_2, \dots, i_q}$ можно выразить следующим образом:

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_q} = \sum_{j=1}^q n_j \left(\left(\frac{i_j}{n_j} \right)^{k_j} - \sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right)^2 - \left(\sum_{v=1}^q \rho_v \left(\frac{i_v}{n_v} \right)^{k_v} \right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^q k_j^2 (1 - \rho_j) \left(\frac{i_j}{n_j} \right)^{k_j-1} \left(1 - \frac{i_j}{n_j} \right) \right) - \sqrt{(q-1) \cdot T_{i_1, i_2, \dots, i_q}} \right),$$

$$B_{i_1, i_2, \dots, i_q} = \left(\sum_{j=1}^q \rho_j \left(\frac{i_j}{n_j} \right)^{k_j} + \sqrt{\frac{T_{i_1, i_2, \dots, i_q}}{q-1}} \right)^2.$$

Данный метод позволяет вычислять вероятности для очень значительных объемов выборок. В таблицах 1, 2 приведены вероятности, рассчитанные согласно формуле (3) для трех и четырех выборок.

Таблица 1.

Точные вероятности для n=3		
Объем выборки	k1=1, k2=1,5, k3=2, h=2	k1=1, k2=1, k3=2, h=2
50	0,904123421	0,90135102
100	0,896318302	0,894678973
150	0,892536666	0,891406301
200	0,890549805	0,88944603
250	0,889192569	0,888265546
300	0,888091604	0,887238249
350	0,887323839	0,886468772
400	0,886716866	0,885941453
500	0,885789546	0,884973234
600	0,885025399	0,884367354
∞	0,87857	0,87857

Таблица 2.

Точные вероятности для n=4			
Объем выборки	k1=1, k2=1, k3=1, k4=1, h=3	k1=1, k2=1, k3=1,5 k4=2, h=3	
25	0,963526316	0,962706086	
50	0,956996011	0,956725111	
75	0,955295607	0,954093971	
100	0,953790968	0,952596535	
125	0,953402217	0,951559987	
150	0,951683692	0,950793656	
175	0,95188731	0,950200509	
200	0,950892391	0,949741421	
225	0,95105207	0,949357107	
250	0,950649706	0,949039338	
∞	0,9454674	0,9454674	

В работе доказан результат для асимптотического распределения статистики T_k^2

Теорема 2. Если справедливо (1), то при $n_i \rightarrow \infty$, $n_i/n \rightarrow \rho_i > 0$, распределение T_k^2 слабо сходится к предельному распределению статистики Кифера-Гихмана, т.е. не зависит от значений k_i .

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} P(T_k^2 < h) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)(2h^2)^{\frac{q-1}{2}}} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\mu_s^{q-3}}{I'_{\frac{q-3}{2}}(\mu_s)} \right] \cdot e^{-\frac{\mu_s^2}{2h^2}}, \quad h > 0,$$

где μ_s - s-ый положительный нуль функции Бесселя $I_{\frac{q-3}{2}}(z)$.

Ввиду ограниченности объема доклада доказательство не приводится. Заметим лишь, что оно основывается на тех же идеях, которые применялись

при выводе предельного распределения статистики для случая двух выборок [4].

2. Алгоритм оценки неизвестного параметра β .

Пусть i -ая выборка получена при значении фактора $x = x_i$. Для удобства изложения можно считать, что степенной зависимостью связаны не функции распределения, а функции надежности (замена гипотезы осуществляется переходом к отрицательным наработкам):

$$P_1^{k_1}(t) = P_2^{k_2}(t) \dots = P_q^{k_q}(t). \quad (4)$$

Модель (4) эквивалентна тому, что интенсивности отказов $\lambda_i(t) = e^{\beta x_i} \lambda_0(t)$, где $\lambda_0(t)$ - неизвестная базовая интенсивность отказов. Без ограничения общности можно положить $k_1 = 1$. Тогда для экспоненциальной модели имеем:

$$P_i = e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau} = e^{-\exp(\beta x_i) \int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau}.$$

$$\text{Пусть } \Lambda_0 = \int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau,$$

$P_i(t) = e^{-\exp(\beta x_i) \Lambda_0(t)} = e^{-\exp(\beta x_i) \Lambda_0(t) \frac{\exp(\beta x_i)}{\exp(\beta x_i)}} = P_i^{-\exp(\beta x_i - \beta x_1)}(t)$, тогда в силу справедливости (4) получаем, что $k_i = e^{\beta(x_1 - x_i)}$. Зафиксируем $k_2 = k_{02}$, тогда $\beta = \frac{\ln k_{02}}{x_1 - x_2}$, а остальные k_i для $i > 2$ определяются по формуле:

$$k_i = e^{\beta(x_1 - x_i)} = e^{\frac{\ln k_{02}}{x_1 - x_2} (x_1 - x_i)} = k_{02}^{\frac{x_1 - x_i}{x_1 - x_2}}.$$

Оценка параметра β осуществляется перебором значений, для которых вычисляется значение статистики (2). Для этого сначала определяется значение k_{02} , минимизирующее статистику T_{mn} (обозначим его $\hat{k}_{02}$), тогда оценка β равна $\frac{\ln \hat{k}_{02}}{x_1 - x_2}$.

Список литературы

1. Paul H. Kvam, Brani Vidakovic. Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering. – A John Wiley & Sons, Inc., Publication. – 2007. – С.446.
2. Кокс Д. Оукс Н. Анализ данных типа времени жизни. – М.: Финансы и статистика, 1990. – С.184.
3. Гихман И.И. Об одном непараметрическом критерии однородности К выборок. // Теория вероятн. и ее применение. – 1957. – т. 2. - №2 - С.380-384.

4. Тимонин В.И. О предельном распределении статистики одного непараметрического критерия. // Теория вероятностей и ее применение. - 1987. - т.32. - №4. - С.790-792.

5. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев.— М.:Наука. - 1971. — С.376.

6. Тимонин В.И., Черномордик О.М. Метод вычисления точного распределения статистик типа Колмогорова-Смирнова при альтернативах Лемана // Теория вероятностей и ее применение.- 1985.- т.30.- №3. - С.572-573.

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПЕРЕМЕННОМ РЕЖИМЕ

П.А. Лёвин

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Рассматривается задача построения точечной статистической оценки для характеристик надежности технической системы в переменном режиме функционирования по результатам ее испытаний в отдельных стационарных режимах. При этом предполагается, что имеется один определяющий внешний переменный фактор, например, действующая на систему внешняя нагрузка и т. п. Предлагается новый подход при построении точечных статистических оценок для показателей надежности системы, при наличии дополнительных ограничений на параметры интенсивности отказов системы.

Введение. Рассмотрим техническую систему (далее ТС), которая может работать в нескольких режимах функционирования, при этом различные режимы определяются теми или иными значениями действующей на систему нагрузки U . Режим назовем стационарным, если действующая на систему в этом режиме нагрузка постоянна во времени. Предполагается, что интенсивность λ отказов системы в том или ином режиме является некоторой функцией нагрузки: $\lambda = \lambda(U)$. Если нагрузка U на систему постоянна, то интенсивность отказов системы в этом режиме также предполагается постоянной. Относительно функции $\lambda(U)$ предполагается только то, что она монотонно возрастающая, что соответствует естественному физическому допущению о возрастании интенсивности отказов системы, при возрастании действующей на неё нагрузки. При этом точный вид функции $\lambda(U)$ в большинстве случаев неизвестен. В реальных эксплуатационных условиях ТС чаще всего функционирует в переменном режиме, когда действующая на систему нагрузка меняется во времени. Предполагается, что система может работать в одном из m возможных

режимов. В момент τ_j происходит переключение с j -го на $(j+1)$ -й. На интервале времени (τ_{j-1}, τ_j) система работает в j -ом режиме с постоянной нагрузкой U_j и интенсивностью отказов $\lambda_j = \lambda(U_j)$, $j=1, \dots, m$. При этом все моменты переключения режимов τ_j известны. Но поскольку зависимость интенсивности отказов системы от действующей внешней нагрузки $\lambda = \lambda(U)$ неизвестна, то значения параметров интенсивности отказов в различных режимах λ_j также неизвестны.

Требуется построить точечную оценку для функции надежности системы $P(t)$ в том или ином переменном режиме функционирования с заданными моментами переключения режимов τ_j по результатам её испытаний в отдельных стационарных режимах.

Функция надежности системы в переменном режиме при заданных моментах переключения режимов τ_j имеет вид

$$P_c(t) = \exp\left[\sum_{j=1}^{k-1} (\tau_j - \tau_{j-1}) \cdot \lambda_j + (t - \tau_{k-1}) \cdot \lambda_k\right]$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – вектор неизвестных параметров интенсивности отказов в различных режимах, где $k=k(t)$ – индекс режима, на который попадает данный момент времени t , другими словами индекс, для которого момент t удовлетворяет неравенству $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ (см. [3], [4]).

Предполагается, что испытания системы в различных режимах проводились по планам типа $[N_j B T_j]$ (см [1]), т.е. на испытания в j -м режиме было поставлено N_j образцов данной системы, испытания проводились с восстановлением отказавших образцов в течение времени T_j , в результате чего наблюдалось d_j отказов, $j=1, \dots, m$. Требуется, исходя из вектора результатов испытаний системы $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$, построить точечную оценку для функции надежности системы в переменном режиме $P(t)$. Данная задача сводится к нахождению точечных оценок для параметров λ_j интенсивности отказов системы в разных режимах, после чего точечная оценка для функции надежности определяется как

$$\hat{P}(t) = \exp\left[\sum_{j=1}^{k-1} (\tau_j - \tau_{j-1}) \cdot \hat{\lambda}_j + (t - \tau_{k-1}) \cdot \hat{\lambda}_k\right] \quad (1)$$

Метод максимального правдоподобия. Для решения задачи далее используется подход, основанный на методе максимального правдоподобия, в соответствии с которым точечные оценки для параметров λ_j определяется как решение задачи максимизации:

$$\ln L(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} \ln L(\lambda) \quad (2)$$

Запишем общий вид $\ln L(\lambda)$ логарифма функции правдоподобия

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^m [d_i (\ln(N_i) + \ln(T_i) + \ln(\lambda_i)) - N_i T_i \lambda_i], \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

Найдя частные производные по λ_i и приравняв их к 0, получим систему уравнений относительно λ_i

$$\frac{d_i}{\lambda_i} - N_i T_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Отсюда следует известные стандартные точечные оценки $\hat{\lambda}_i$ для параметров интенсивности отказов λ_i

$$\hat{\lambda}_i = \frac{d_i}{N_i T_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

Заметим, что в рассматриваемой здесь постановке данный метод может быть улучшен за счёт указанной выше дополнительной априорной информации о монотонном возрастании интенсивности отказов системы $\lambda(U)$ при возрастании внешней нагрузки. Исходя из этого, значения параметров интенсивности отказов в различных режимах λ_j можно считать упорядоченными. Далее для определенности рассматривается случай, когда это упорядочение имеет вид $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$. С учетом указанных неравенств искомая точечная оценка (1) как решение задачи максимизации

$$L(\lambda^*) = \max L(\lambda) \quad (5)$$

где максимум берется при дополнительных ограничениях

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m. \quad (6)$$

В отличие от обычной процедуры метода максимального правдоподобия, для которого $\hat{\lambda}_i$ легко находится аналитически, для задачи с дополнительными ограничениями эта величина в общем случае уже не вычисляется аналитически, но может быть достаточно просто найдена с помощью численного алгоритма на основе следующей далее теоремы 1. Пусть $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m)$ – точка, в которой достигается максимум (1) для исходной задачи (2). Нетрудно видеть, что $\hat{\lambda}_i = \frac{d_i}{N_i T_i}$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим также через $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ точку, в которой достигается максимум (5) при ограничениях (6).

Теорема 1. Если в решении $\hat{\lambda}$ задачи (2) для метода максимального правдоподобия для некоторого индекса $l \in (1, 2, \dots, m)$ выполняется неравенство $\hat{\lambda}_l \geq \hat{\lambda}_{l+1}$, то в решении λ^* задачи (5) при ограничениях (6) выполняется равенство $\lambda_l^* = \lambda_{l+1}^*$.

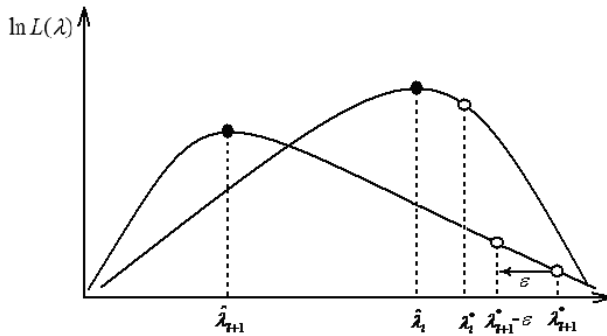


Рис. 2.

В этом случае, задав приращение ε , такое что $0 < \varepsilon \leq \lambda_{t+1}^* - \lambda_t^*$, очевидно, что значение целевой функции в новой точке $\lambda^{**} = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_t^*, \lambda_{t+1}^* - \varepsilon, \dots, \lambda_m^*)$ также увеличится, по сравнению со значением целевой функции в точке $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_t^*, \lambda_{t+1}^*, \dots, \lambda_m^*)$.

Во всех рассмотренных случаях новая точка λ^{**} по-прежнему удовлетворяет всем ограничениям (6) задачи (5), но значение целевой функции в этой точке строго больше чем в исходной точке λ^* . Тем самым, предположение (7) приводит к тому, что точка λ^* не может быть точкой, в которой достигается максимум в задаче (5) при ограничениях (6), что приводит к противоречию. Таким образом, должно выполняться равенство $\lambda_t^* = \lambda_{t+1}^*$. Теорема доказана.

В соответствии с теоремой 1 численное нахождение точечной оценки для задачи (5) при ограничениях (6) сводится к не более чем m -кратному решению значительно более простой задачи методом максимального правдоподобия, (каждый раз размерности меньшей на 1). Соответствующий численный алгоритм строится следующим образом. На первом шаге решается задача (2) методом максимального правдоподобия. Если полученное решение $\hat{\lambda}$ удовлетворяет ограничениям (6), то оно одновременно даёт решение и для задачи (5). Если это не так, то находим первый индекс l , для которого $\hat{\lambda}_l \geq \lambda_{l+1}^*$. Далее при решении задачи полагаем $\lambda_l = \lambda_{l+1}^*$ и возвращаемся к началу алгоритма, снова решаем аналогичную задачу (2) (меньшей размерности) методом максимального правдоподобия и так далее до тех пор, пока на некотором шаге не будут выполнены все дополнительные ограничения вида (6). В результате решение задачи будет получено не более чем за m шагов. Тем самым, с ростом размерности задачи (числа различных режимов) m вычислительная трудоемкость решения задачи (5) при ограничениях (6) возрастает не быстрее, чем линейно.

В заключение необходимо отметить, что интересным с прикладной точки зрения направлением дальнейших исследований в рамках данной проблематики является также случай нескольких одновременно действующих на систему переменных факторов, например воздействие температуры в дополнение к действующей на систему внешней нагрузке.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Ллойд Д.К., Липов М. Надежность. – Изд. “Сов. радио”, 1964.
3. Левин П.А, Павлов И.В., Интервальное оценивание надежности системы в переменном режиме функционирования, //Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, серия “Естественные Науки”, – 2008, №3, с. 60-69.
4. Левин П.А. Павлов И.В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Естественные науки». – 2009. - № 2. - с. 28 – 37.
5. Лёвин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности систем радиоэлектроники в переменном режиме функционирования. // Ж. “Успехи современной радиоэлектроники”. - 2009 . - № 3. - с. 73 – 79.
6. Карташов Г.Д. Предварительные исследования в теории форсированных испытаний. – М.: Знание, 1980 г. – 51 с.
7. Белов В.Н. Стохастические модели временных процессов, – т. 2. “Политехник”, Волгоград, 2002 г. – 215с.
8. Беляев Ю.К., Дугина Т.М., Чепурин Е.В. Вычисление нижней доверительной оценки для вероятности безотказной работы сложных систем, Часть I // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. – 1967.– №2. – с 52-59
9. Павлов И.В. Доверительные границы для выпуклых функций многих неизвестных параметров. // Теор. Вероятн. и её применен. – 1980. – т. 25, вып. 2. – с. 394-398.
10. Pavlov I.V., Teskin O.I., Ukolov S.N. A comparison of some exact and approximate methods for calculating confidence bounds for system reliability based on component test data // Proceeding of the first international conference, MMR’97, Bucharest, Romania – Sept., 1997. – pp. 231-236.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИЙ

А.В. Мاستихин

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Первыми рассмотренными в математической литературе марковскими процессами эпидемии были процесс эпидемии Бартлетта - Мак-Кендрика [1] и процесс эпидемии Вейса [2]; оба этих марковских процесса определяются на фазовом пространстве N^2 , здесь $N = 0, 1, 2, \dots$

В процессе эпидемии Бартлетта - Мак-Кендрика при взаимодействии носителя инфекции (частицы типа T_1) и здоровой особи (частицы типа T_2) появляются два носителя инфекции. Кроме того, через случайное время носители инфекции погибают. Таким образом моделируется процесс заражения. Схема взаимодействий имеет вид $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$, $T_1 \rightarrow 0$.

Вейс [2] для упрощения исследования стохастической модели эпидемии ввел понятие переносчика, то есть частицы (типа T_1), которая может иметь другую природу, нежели восприимчивая к инфекции частица типа T_2 , и находится вне популяции. В процессе эпидемии Вейса при взаимодействии переносчика инфекции и здоровой особи остается только переносчик инфекции, то есть здоровая особь после контакта с переносчиком инфекции удаляется из популяции. Таким образом предполагается, что популяция находится под наблюдением, но первоначальные переносчики инфекции не могут быть выявлены. Примером такой ситуации может быть компьютерная эпидемия. Компьютеры, получившие вирус, наблюдаются пользователями и удаляются из сети компьютеров. В тоже время первоначально инфицированные компьютеры, распространяющие вирус, неизвестны. Предполагается, что первоначально инфицированные компьютеры случайным образом выходят из строя. Схема взаимодействий имеет вид $T_1 + T_2 \rightarrow T_1$, $T_1 \rightarrow 0$.

В [4] рассматривается модель, открытая для переносчиков, т.е. модель распространения инфекции в популяции с двумя типами особей (частиц), к которой могут появляться извне новые переносчики. Схема взаимодействий: $T_1 + T_2 \rightarrow T_1$, $0 \rightarrow T_1$, $T_1 \rightarrow 0$. Модель повторяющейся эпидемии, предусматривающая возможность периодического повторения заболевания, задается схемой $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$, $0_1 \rightarrow T_2$, $T_1 \rightarrow 0$.

Имеются многочисленные обобщения процесса Вейса на случай фазового пространства N^n . Например, определенный Гани [3] марковский процесс эпидемии на N^3 интерпретируется как двухстадийный процесс распространения СПИД. Схема взаимодействия имеет вид $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3$; $T_1 + T_3 \rightarrow T_1$; $T_1 \rightarrow 0$, где частицы типа T_1 - зараженные особи (переносчики инфекции); частицы типа T_2 - здоровые особи (восприимчивые к инфекции),

не имевшие пока контактов с зараженными); частицы типа T_3 - особи, имевшие один контакт с зараженными (ставшие переносчиками инфекции). Здоровая особь после двух контактов с зараженным удаляется из популяции.

Двойная эпидемия Вейса [4], то есть модель одновременного распространения в одной популяции двух эпидемий Вейса с разными интенсивностями взаимодействия между восприимчивыми особями и переносчиками двух типов. В популяции имеются три типа частиц, два из которых являются переносчиками. Схема взаимодействий имеет вид:

$$T_1 + T_3 \rightarrow T_1, T_2 + T_3 \rightarrow T_2, T_1 \rightarrow 0, T_2 \rightarrow 0.$$

Модель эпидемии с приобретением иммунитета в популяции с тремя типами особей (частиц), в которой наряду с заражением частиц возможно приобретение и потеря иммунитета. Частицы типа T_1 - больные особи (источники инфекции); частицы типа T_2 - здоровые особи (восприимчивые к инфекции); частицы типа T_3 - особи с иммунитетом. Схема взаимодействий:

$$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1, T_1 \rightarrow T_3, T_3 \rightarrow T_2.$$

Для практических приложений в дискретных стохастических моделях эпидемий наибольший интерес представляет случайная величина, характеризующая число финальных частиц. Для описанных моделей эпидемий нахождение финального распределения сводится к решению стационарного первого уравнения Колмогорова для экспоненциальной (двойной) производящей функции финальных вероятностей [5]. Получаемое решение имеет интегральный вид, который используется для вывода предельных теорем [6], [7].

Список литературы

1. *Эпидемии процесс* // Математическая энциклопедия, Т. 5, М.: Советская энциклопедия, 1985, Кол. 1008.
2. *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries // *Biometrics*, 1965, V 21, № 2, P. 481-490.
3. *Gani J.* Approaches to the modeling of AIDS // *Lecture notes in biomathematics*, V. 86. Stochastic processes in epidemic theory. Heidelberg: Springer, 1990, P. 145-154.
4. *Becker N.G.* . Interactions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models // *Rocky Mountain J. Math.*, 1973, V.4, № 1, P. 53-68.
5. *Калинкин А.В.* Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, Т. 43, № 4, С. 773-780.
6. *Мастихин А.В.* Финальное распределение для Марковского процесса эпидемии Гани // *Математические заметки*, 2007, Т.82, № 6, С. 873-884.

7. *Мастихин А.В.* Пределные теоремы для числа финальных частиц в марковских процессах эпидемий // Сборник трудов международной конференции «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры» (Омск, 2 - 7 августа 2010 г).

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ИХ КОМПОНЕНТ

И.В.Павлов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Введение. Оценка показателей надежности сложных технических систем на основе статистической информации по отдельным компонентам (элементам, подсистемам) системы является одной из актуальных проблем математической теории надежности. Данная проблема может возникать, в частности, на этапе проектирования, когда испытания системы, как единого целого, не могут быть проведены в достаточном объеме или вообще невозможны, а имеется лишь информация по испытаниям ее отдельных компонент, полученная, например, в ходе испытаний предыдущих систем – аналогов и т.п. Эта же проблема во многих случаях возникает и на этапе эксплуатации, когда по результатам наблюдений за процессом функционирования системы и ее отдельных компонент требуется оценить и дать гарантированный прогноз для тех или иных характеристик данной системы. Кроме того, во многих случаях, исходя из имеющейся статистической информации, требуется также оценить и другие возможные варианты системы, связанные с необходимостью ее развития, наращивания, устранения узких мест и т.п. Существенной особенностью данной задачи является то обстоятельство, что испытания по различным частям системы могут значительно различаться как по объему, так и по продолжительности, вследствие чего найденные по результатам испытаний оценки параметров различных элементов могут иметь различную достоверность. При этом основной интерес с точки зрения приложений чаще всего представляет построение доверительных оценок для тех или иных показателей надежности системы.

Существующие в настоящее время точные методы решения данной задачи разработаны главным образом для систем с нагруженным резервированием элементов без восстановления (см. [1-12] и др.). Для систем с восстановлением в настоящее время имеются соответствующие решения лишь для частных случаев или некоторые приближенные методы такие, как метод нормального приближения, бутстреп и фидуциальный методы, которые во многих случаях дают значительную погрешность при

оценке надежности системы (см. [5-7]). Далее предлагается метод доверительного оценивания одного из основных показателей надежности – коэффициента готовности для некоторых часто используемых и довольно общих моделей сложных систем с восстановлением (с нагруженным резервированием и независимым восстановлением элементов внутри различных подсистем).

Последовательная система с восстанавливаемыми элементами.

Рассмотрим систему с последовательной структурой из m различных элементов (см. рис. 1).

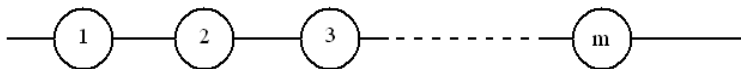


Рис. 1.

Пусть ξ_i - случайное время безотказной работы и η_i - время восстановления (замены) i -го элемента, $\theta_i = E\xi_i$ - среднее время безотказной работы и $\vartheta_i = E\eta_i$ - среднее время восстановления i -го элемента (где E – символ математического ожидания). Далее предполагается, что время безотказной работы ξ_i имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_i = \frac{1}{\theta_i}$ (точное значение которого, вообще говоря, неизвестно),

распределение времени восстановления η_i - произвольное с математическим ожиданием $\vartheta_i = E\eta_i = \int_0^{\infty} [1 - G_i(t)] dt$, где $G_i(t)$ - функция распределения (вообще говоря, неизвестная) времени восстановления. Далее будем предполагать также, что параметры восстановления ϑ_i известны, что довольно часто имеет место на практике, по крайней мере, в случае высоконадежных элементов (при $\vartheta_i \ll \theta_i$) или, другими словами, в ситуации «быстрого восстановления», когда средние времена восстановления достаточно малы и практически точно известны.

В предположении, что отказы и восстановление различных элементов происходят независимо друг от друга, коэффициент готовности системы имеет вид

$$K(\theta) = \prod_{i=1}^m k_i(\theta_i), \quad (1)$$

где $k_i(\theta_i) = \frac{\theta_i}{\theta_i + \vartheta_i}$ - коэффициент готовности одного, отдельно взятого i -го элемента, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ - вектор параметров надежности всех элементов системы.

При этом точные значения параметров отдельных элементов θ чаще всего неизвестны, а известны лишь результаты их испытаний на надежность, полученные либо в ходе испытаний одного или нескольких образцов данной системы, либо в ходе испытаний ее отдельных частей или предыдущих систем-аналогов и т.п.

Далее будем предполагать, что испытания элементов системы проводились по стандартным планам типа $[N_i \ B \ r_i]$ или $[N_i \ B \ r_i]$ (в обозначениях книги [2]), т.е. испытывалось N_i идентичных элементов i -го типа, испытания проводились с восстановлением (или без восстановления для планов $[N_i \ B \ r_i]$) отказавших элементов до наблюдения r_i отказов, в результате чего была зафиксирована суммарная наработка S_i , $i=1,...,m$. Требуется, исходя из вектора $S = (S_1, ..., S_m)$ результатов испытаний по всем типам элементов системы построить нижнюю доверительную границу (н.д.г.) $K_* = K_*(S)$ для коэффициента готовности системы (1).

Простой стандартный метод решения подобных задач (см. например [1], [2], [5], [7-9] и др.) основан на вычислении н.д.г. K_* путем прямой подстановки частных доверительных границ для параметров надежности элементов в функцию (1), то есть

$$K_* = \prod_{i=1}^m \frac{\theta_{i*}}{\theta_{i*} + \vartheta_i}, \quad (2)$$

где

$$\theta_{i*} = \frac{2S_i}{\chi_{\gamma}^2(2r_i)} - \quad (3)$$

стандартная нижняя доверительная граница с коэффициентом доверия γ для параметра θ_i (среднего ресурса) i -го элемента, $\chi_{\gamma}^2(n)$ - квантиль уровня γ χ^2 -распределения с n степенями свободы, $\theta_* = (\theta_{1*}, ..., \theta_{m*})$ - вектор частных доверительных границ для параметров надежности отдельных элементов. При этом коэффициент доверия γ_c получаемой таким образом нижней доверительной границы (2) для системы в общем случае связан с коэффициентом доверия γ в (3) для отдельных элементов соотношением

$$\gamma_c = \gamma^m, \quad (4)$$

что значительно снижает эффективность такого простого подхода при увеличении размерности задачи m (числа различных элементов системы). Соотношение (4) между коэффициентом доверия γ_c для системы и исходным коэффициентом доверия γ для отдельных элементов фактически не позволяет использовать данный подход уже при размерности $m > 10$.

Далее на основе результатов работ [3], [4] даются условия, при которых данный метод может использоваться с сохранением для системы

начального коэффициента доверия γ для отдельных элементов, то есть при $\gamma_c = \gamma$.

Обозначим через Φ - класс всех функций распределения $F(t)$ таких, что $F(0)=0$ и функция $\Lambda(t) = -\ln[1-F(t)]$ выпукла вниз по $t \geq 0$ при всех t таких, что $F(t) < 1$ (класс ВФИ-распределений). Заметим, что случайная величина S_i - суммарная наработка элементов i -го типа для планов испытаний типа $[N_i B r_i]$ или $[N_i B r_i]$ имеет стандартное гамма-распределение, которое принадлежит указанному классу распределений (см. [2], [3]). Отсюда в соответствии с (3) следует, что и распределение н.д.г. θ_{i*} также принадлежит указанному классу Φ для всех типов элементов $i=1, \dots, m$.

Пусть $\Theta = \{\theta: \theta_i > 0, i=1, \dots, m\}$ - пространство всех возможных значений вектора θ параметров надежности элементов, которое в данном случае совпадает с положительным квадрантом n -мерного евклидова пространства E_m . Введем систему подмножеств $H_c \subset \Theta$ следующего вида

$$H_c = \left[\theta \in \Theta : K(\theta) = \prod_{i=1}^m \frac{\theta_i}{\theta_i + \vartheta_i} \geq c \right], \quad (5)$$

где $c \geq 0$. Нетрудно показать, что множество (5) является выпуклым при любом уровне $c \geq 0$, тем самым, функция $K(\theta)$ является квазивыпуклой вверх по $\theta \in \Theta$. Далее везде будем предполагать также, что используемый при доверительном оценивании надежности системы коэффициент доверия γ удовлетворяет неравенству

$$\gamma \geq 1 - e^{-\frac{3}{2}} \cong 0.778. \quad (6)$$

Поскольку наиболее часто используемое значение коэффициента доверия находится в диапазоне $0.8 - 0.99$, то условие (6) практически не является ограничивающим.

В перечисленных выше условиях н.д.г. K_* для коэффициента готовности системы в соответствии с [3], [4] далее может вычисляться указанным выше методом, то есть путем прямой подстановки частных γ -доверительных границ $\theta_* = (\theta_{1*}, \dots, \theta_{m*})$ для параметров отдельных элементов в функцию надежности системы, то есть по формуле

$$K_* = K(\theta_*) = K(\theta_{1*}, \dots, \theta_{m*})$$

с сохранением для системы начального коэффициента доверия γ для отдельных элементов, т.е. при $\gamma_c = \gamma$, что дает эффективное решение задачи при любом количестве m элементов системы.

Система с нагруженным резервированием и независимым восстановлением. Рассмотрим систему составленную из m последовательно соединенных резервных подсистем (см. рис. 2), i -ая подсистема состоит из

n_i однотипных резервных элементов, работающих в режиме нагруженного резервирования.

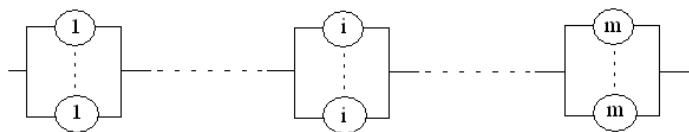


Рис. 2

В случае отказа элемент i -й подсистемы начинает восстанавливаться (сразу в момент отказа) независимо от состояния других элементов. Для данной модели индикатор отказа системы $Z_c(t)$ в момент времени t связан с индикаторами отказов элементов соотношением

$$Z_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} z_{ij}(t) \right],$$

где $z_{ij}(t)$ - индикатор отказа j -го элемента i -й подсистемы в момент t (см. рис. 3, 4).

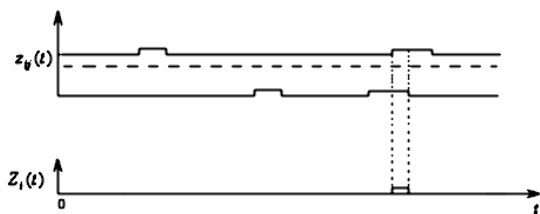


Рис. 3. ($Z_i(t)$ - индикатор отказа i -й подсистемы)

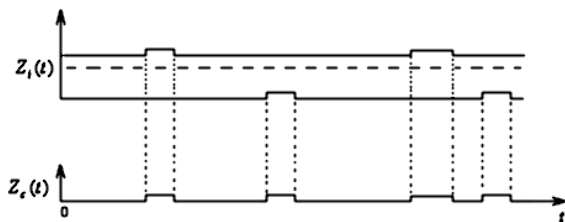


Рис. 4. ($Z_c(t)$ - индикатор отказа системы)

Коэффициент готовности системы соответственно имеет вид

$$K = K(\theta) = \prod_{i=1}^m \left[1 - \left(\frac{\vartheta_i}{\theta_i + \vartheta_i} \right)^{n_i} \right], \quad (7)$$

где по-прежнему θ_i - средняя наработка на отказ и ϑ_i - среднее время восстановления одного элемента i -го типа.

В отличие от предыдущей более простой модели (для последовательной системы), функция надежности системы (7) уже не является квазивыпуклой по $\theta \in \Theta$, что не позволяет напрямую использовать результаты [3], [4] для данной более общей модели. Тем не менее, обобщение предыдущего метода для этой более общей ситуации с резервированием далее может быть получено в приближенном смысле для случая высокой надежности, а именно, в предположении

$$\frac{\vartheta_i}{\theta_i} \ll 1, \quad i = 1, \dots, m$$

то есть для случая «быстрого восстановления», когда среднее время восстановления элементов мало по сравнению со средней наработкой (для всех типов элементов), что является довольно естественным условием для современных высоконадежных систем.

Из (7) после простых преобразований следует приближенное (при $\frac{\vartheta_i}{\theta_i} \ll 1$) выражение для коэффициента готовности системы

$$K(\theta) \cong \exp[-f(\theta)], \quad (8)$$

где

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\vartheta_i}{\theta_i} \right)^{n_i}. \quad (9)$$

Функция (9) монотонно убывает по каждому аргументу и выпукла вниз по $\theta \in \Theta$, откуда в соответствии с [3], [4] следует, что н.д.г. K_* для коэффициента готовности системы $K(\theta)$, по крайней мере в его приближенном варианте (8), может вычисляться на основе рассмотренного выше подхода, так же как и в предыдущей модели для последовательной системы.

Система составленная из подсистем типа l_i из n_i . Пусть система составлена из m последовательно соединенных подсистем (см. рис. 5), i -я подсистема состоит из n_i однотипных элементов, по-прежнему работающих в режиме нагруженного резервирования.

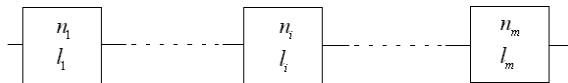


Рис. 5

При этом i -я подсистема исправна, если в ней исправны по крайней мере l_i из n_i элементов. Так же, как и в предыдущих моделях, предполагается, что в случае отказа элемент i -й подсистемы начинает восстанавливаться сразу в момент отказа независимо от состояния других элементов. Индикатор отказа системы $Z_c(t)$ в этом случае имеет вид

$$Z_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - Z_i(t)],$$

где $Z_i(t)$ - индикатор отказа i -й подсистемы в момент времени t

$$Z_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}(t) \geq n_i - l_i + 1 \\ 0, & \text{если } \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}(t) \leq n_i - l_i \end{cases},$$

где, в свою очередь, $z_{ij}(t)$ - индикатор отказа j -го элемента i -й подсистемы. В предположении, что отказы и восстановление различных элементов системы происходят независимо друг от друга, коэффициент готовности системы для данной модели имеет вид

$$K(\theta) = \prod_{i=1}^m K_i(\theta_i), \quad (10)$$

где $K_i(\theta_i)$ - коэффициент готовности i -й подсистемы

$$K_i(\theta_i) = \sum_{d=0}^{n_i-l_i} C_{n_i}^d \left(\frac{\vartheta_i}{\theta_i + \vartheta_i} \right)^d \left(\frac{\theta_i}{\theta_i + \vartheta_i} \right)^{n_i-d}. \quad (11)$$

Предыдущие модели (последовательной и последовательно-параллельной систем) являются частными случаями данной более общей схемы соответственно при $n_i = 1$, $l_i = 1$ и $n_i \geq 1$, $l_i = 1$ при всех $i=1, \dots, m$.

В предположении, что

$$\frac{\vartheta_i}{\theta_i} \ll 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

то есть среднее время восстановления мало по сравнению со средним временем безотказной работы (по всем типам элементов), из (10), (11) следует более простое приближенное выражение

$$K(\theta) \cong \exp[-f(\theta)], \quad (12)$$

где

$$f(\theta) = \sum_{i=0}^m C_{n_i}^{l_i-1} \left(\frac{\vartheta_i}{\theta_i} \right)^{n_i-l_i+1}. \quad (13)$$

Функция (13) монотонно убывает по каждому аргументу и выпукла вниз по вектору всех параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$. Отсюда в соответствии с [3], [4] следует что н.д.г. K_* для коэффициента готовности системы (12) может вычисляться на основе рассмотренного выше подхода (метода «прямой подстановки» с сохранением начального коэффициента доверия), то есть

$$K_* = \exp \left[- \sum_{i=0}^m C_{n_i}^{l_i-1} \left(\frac{\vartheta_i}{\theta_{i*}} \right)^{n_i-l_i+1} \right],$$

где θ_{i*} - соответствующие доверительные границы (3) для параметров отдельных элементов, что дает одновременно довольно простое и эффективное решение независимо от фактора размерности задачи m (количества подсистем).

В заключении необходимо отметить, что актуальным направлением дальнейших исследований в рамках данной проблематики (статистические методы оценки надежности сложных технических систем) является разработка соответствующих методов как для более общих моделей сложных систем (с более общими режимами резервирования и восстановления, с более общими предположениями о законах распределения времени безотказной работы элементов и др), так и для более общих показателей надежности, таких как оперативный коэффициент готовности системы и др.

Список литературы

1. Ллойд Д.К., Липов М. Надежность. – Изд. “Сов. радио”, 1964.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. Павлов И.В. Интервальное оценивание квазивыпуклых функций в задачах надежности // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика – 1979. – №3.
4. Павлов И.В. Доверительные границы для выпуклых функций многих неизвестных параметров. // Теор. Вероятн. и её применен. – 1980. – т. 25, вып. 2. – с. 394-398.
5. Павлов И.В. Статистические методы оценки надежности сложных систем. – М.: Радиосвязь, 1982. – 168 с.
6. Павлов И.В. О фидуциальном подходе при вычислении доверительных границ для функций многих неизвестных параметров. // Доклады АН СССР. – 1981. - т. 258. – № 6. – с.1314 – 1317.
7. Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. Statistical Reliability Engineering. - John Wiley, New York, 1999, - 514 p.
8. Pavlov I.V., Teskin O.I., Ukolov S.N. A comparison of some exact and approximate methods for calculating confidence bounds for system reliability

based on component test data // Proceeding of the first international conference, MMR'97, Bucharest, Romania – Sept., 1997. – pp. 231-236.

9. Pavlov I.V., Teskin O.I., Goryainov V.B., Ukolov S.N. Confidence bounds for system reliability based on binomial components test data // Proceeding of the second international conference, MMR'2000, Bordeaux, France. – Jul., 2000. – pp. 852-855.

10. Павлов И.В. Интервальное оценивание надежности системы с ненагруженным резервированием по результатам испытаний элементов. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Естественные науки». – 2005. - № 1. – с. 22 – 29.

11. Левин П.А. Павлов И.В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Естественные науки». – 2009. - № 2. - с. 28 – 37.

12. Лёвин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности систем радиоэлектроники в переменном режиме функционирования. //Успехи современной радиоэлектроники. - 2009. - № 3. - с. 73 – 79.

ПРИМЕНЕНИЕ ОЦЕНОК КАПЛАНА-МЕЙЕРА ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ В ИСПЫТАНИЯХ С ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

К.А. Репекто
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В последние годы в теории надежности чрезвычайно актуальной стала проблема ускоренных испытаний. Решение этой проблемы может быть осуществлено с использованием форсированных режимов, позволяющих существенно сократить длительность испытаний. Однако перед проведением испытаний в форсированном режиме необходимо провести предварительные испытания, в ходе которых выбираются форсированные режимы и определяются функции пересчета результатов форсированных испытаний на нормальный режим.

В данной статье рассматриваются методы проведения предварительных испытаний, основанные на испытаниях изделий группами по m штук. Опишем структуру испытаний. Будем испытывать выборку объема $N = mn$ в переменном режиме $\tilde{\varepsilon}(t)$ группами по m изделий. Для этого изделия случайно разбиваются на n групп по m изделий в группе, которые начинают испытывать в режиме ε_0 . При отказе r изделий из группы переменный режим $\tilde{\varepsilon}$ должен предусматривать переключение оставшихся $m - r$ изделий в $m - r$ форсированных режимов. Пусть

наработки изделия $\xi_0, \xi_*, \dots, \xi_{m-r}$ в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_*, \dots, \varepsilon_{m-r}^*$ соответственно связаны соотношением

$$H_0: \xi_0 = \varphi_1(\xi_*^1), \dots, \xi_0 = \varphi_{m-r}(\xi_*^{m-r}), \quad (1)$$

где $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-r}(x)$ – некоторые функции. Обозначим $\theta_0^i, \theta_{*1}^i, \dots, \theta_{(m-r)}^i$ – времена работы i -ой группы в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_*^1, \dots, \varepsilon_{m-r}^*$ соответственно. Тогда θ_0^i – время работы до отказа первых r изделий. Если справедливо (1), то величины $\eta_1^i = \theta_0^i + \varphi_1(\theta_{*1}^i), \dots, \eta_{(m-r)}^i = \theta_0^i + \varphi_{(m-r)}(\theta_{*(m-r)}^i)$ будут совпадать с оставшимися наработками ξ_j^i .

Обозначим через $Q = (\theta_{01}^1 \dots \theta_{0r}^1, \eta_1^1, \dots, \eta_{(m-r)}^1, \dots, \theta_{01}^n \dots \theta_{0r}^n, \eta_1^n, \dots, \eta_{(m-r)}^n)$ объединенную выборку величин. Построим выборку $\Theta = (\theta_{0,1}^1, \theta_{0,2}^1 \dots \theta_{0,r}^1, \theta_{0,r+1}^{*1}, \dots, \theta_{0,m}^{*1}, \dots, \theta_{01}^n, \theta_{02}^n \dots \theta_{0r}^n, \theta_{0,r+1}^{*n}, \dots, \theta_{0,m}^{*n})$, состоящую из наработок до отказов изделий в режиме ε_0 и моментов цензурирования изделий в режиме ε_0 . Очевидно, что $\theta_{0,r}^j = \theta_{0,r+1}^{*j} = \dots = \theta_{0,m}^{*j}$. Рассмотрим выборочные функции надежности, вычисленных по разным выборкам Q и Θ . Обозначим $\hat{P}_q(t)$ – эмпирическая оценка функции надежности по выборке Q , $\hat{P}_\theta(t)$ – оценка Каплана-Мейера функции надежности по выборке Θ . Оценка функции $\hat{\phi}$ находится минимизацией статистики

$$T_{mn} = \max_t \sqrt{n} (\hat{P}_q(t))^{m-r} |\hat{P}_q(t) - \hat{P}_\theta(t)|. \quad (2)$$

Задача оценки функции $\hat{\phi}$ при $r=1, m=2,3$ была решена в работе [1], при $r=1$ и произвольном m в работе [2]. В этой статье рассматривается задача оценки функции $\hat{\phi}$ при произвольных значениях r и m .

Рассмотрим вариационный ряд объединенной выборки Q :

$$v_1 < v_2 < \dots < v_{mn}.$$

Пусть $z_k = \begin{cases} 1, & \text{если } v_k - \text{одно из } \theta_0^k, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad k=1 \dots mn.$ Пусть $i_k = \sum_{j=1}^k v_k$ –

количество «единиц» после k отказов. Введем параметры $s_l^p, l=1 \dots n$, такие что при $i_k = s_l^p$ происходит r -й отказ в l -ой группе. Очевидно, что $r \leq s_1^p < s_2^p < \dots < s_n^p = nr$, $s_l^p \geq lr$. Введем параметры $a_l, l=1 \dots n$ – количество «нулей» между r -ми отказами l -ой и $l+1$ -ой групп. Очевидно, что $a_l \leq l(m-r) - \sum_{u=1}^{l-1} a_u$, $a_n = n(m-r) - \sum_{l=1}^{n-1} a_l$. При фиксированных параметрах s_l^p и a_l допустимыми векторами z будут такие, для которых выполняется:

1. z состоит из nr единиц и $n(m-r)$ нулей.
2. $s_l^p \leq i_k < s_{l+1}^p, \sum_{u=1}^{l-1} a_u \leq j_k \leq \sum_{u=1}^l a_u$ при $s_l^p + \sum_{u=1}^{l-1} a_u \leq k < s_{l+1}^p + \sum_{u=1}^l a_u, k=1 \dots mn$.

Утверждение 1. Вероятность любого допустимого вектора

$$P(z) = \frac{1}{C_{a_1+s_1^p-s_1^p-1}} \cdot \frac{1}{C_{a_2+s_2^p-s_2^p-1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{C_{a_{n-1}+s_{n-1}^p-s_{n-1}^p-1}}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда зафиксированы только параметры s_i^p . Тогда допустимыми векторами z будут такие, для которых выполняется:

1. z состоит из nr единиц и $n(m-r)$ нулей.
2. $0 \leq j_k \leq l(m-r)$ при $s_i^p \leq i_k < s_{i+1}^p$, $k = 1 \dots mn$.

Введение дополнительных параметров s_i^p объясняется необходимостью обеспечения независимости значения оценки Каплана-Мейера функции надежности от предыстории отказов в любой момент времени. При фиксированных параметрах s_i^p вероятность любого допустимого вектора z может быть получена согласно следующему утверждению:

Утверждение 2. Вероятность любого допустимого вектора

$$P(z) = \frac{C_{m-r}^{a_1} a_1! C_{2(m-r)-S_2}^{a_2} a_2! \dots C_{(n-1)(m-r)-S_{n-1}}^{a_{n-1}} a_{n-1}! (n(m-r) - S_n)!}{[(m-r)!]^n \prod_{j=2}^n C_{j(m-r)+Q_{n+2-j}+j-1}^{m-r}}, \quad (4)$$

или

$$P(z) = \frac{(m-r)(m-r-1) \dots (m-r-a_1+1) \dots ((n-1)(m-r)-S_{n-1}) \dots ((n-1)(m-r)-S_n+1)(n(m-r)-S_n) \dots 1}{(m-r) \dots 1 \cdot (2(m-r)+Q_n+1) \dots (m-r+Q_n+2) \dots (n(m-r)+Q_2+n-1) \dots ((n-1)(m-r)+Q_2+n)}, \quad (5)$$

где $Q_i = \sum_{j=i}^n (s_j^p - s_{j-1}^p - 1) = nr - (n-i+1)s_{i-1}^p$, $S_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j$.

Числитель и знаменатель выписанной выше дроби имеют по $n(m-r)$ сомножителей. Обозначим сомножители $\lambda_1 = \frac{(m-r)}{(m-r)}$, $\lambda_2 = \frac{(m-r-1)}{(m-r-1)}, \dots$,

$$\lambda_{n(m-r)} = \frac{1}{((n-1)(m-r) + Q_2 + n)}.$$

Заметим, что каждому допустимому вектору z может быть поставлена во взаимно однозначное соответствие траектория на множестве $A^s = \{a_{ij}\}$, $0 \leq j \leq l(m-r)$ при $s_i^p \leq i < s_{i+1}^p$. Рассмотрим случайное блуждание по множеству A^s .

Теорема. Вероятность $P\{T_{mn} < h\}$ равна величине $\pi_{nr, n(m-r)}$, которую можно получить повторным соотношением

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1, & i=1, j=0; \\ \pi_{i-1, j} \chi_{ij}, & a_{ij} \in A^s, j=0; \\ (\pi_{i-1, j} + \lambda_j \pi_{i, j-1}) \chi_{ij}, & a_{ij} \in A^s, 1 \leq i \leq nr, j > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} \in A_0 \\ 0, & a_{ij} \notin A_0 \end{cases}$ - индикатор множества A_0 , причем индексы i, j

удовлетворяют условиям:

$$1. \quad i=1, j=0.$$

$$2. \quad \sqrt{n} \left(\frac{mn-i-j+1}{mn} \right)^{m-r} \left| \frac{mn-i-j+1}{mn} - \prod_{k=1}^i \left(1 - \frac{1}{mn-k+1-(m-r)(l-1)} \right) \right| < h,$$

$$a_{ij} \in A_l, i \leq nr-1, \quad A_l = \left\{ a_{ij} \mid s_{l-1}^p \leq i < s_l^p, \sum_{u=1}^{l-2} a_{iu} \leq j \leq \sum_{u=1}^{l-1} a_{iu} \right\}.$$

$$3. \quad \sqrt{n} \left(\frac{mn-nr-j+1}{mn} \right)^{m-r} \left| \frac{mn-nr-j+1}{mn} \right| < h, \quad i = nr.$$

На основании этой теоремы могут быть получены значения $P\{T_{mn} < h\}$ при любых допустимых наборах входящих параметров и практически любых объемах выборок, встречающихся на практике. Заметим, что при увеличении объема выборок распределение статистики T_{mn} сходится к некоторому предельному распределению:

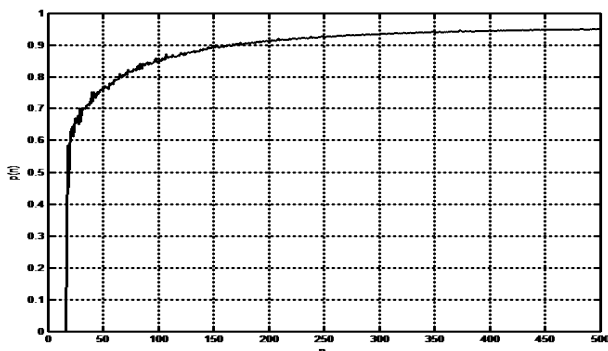


Рис. 1. Зависимость $P(n)$ при $r=3$, $m=6$, $h=0.041$.

Методами статистического моделирования может быть показана состоятельность оценок функций пересчета, получаемых минимизацией статистики (2). Например, для функций пересчета вида $\varphi(x) = kx$ при $n=150$, $m=6$, $r=3$, $k=3$ было получено $\hat{k} = 2.99$, $S^2 = 0.12$, гистограмма полученных оценок $\hat{k}$ представлена на рис. 2:

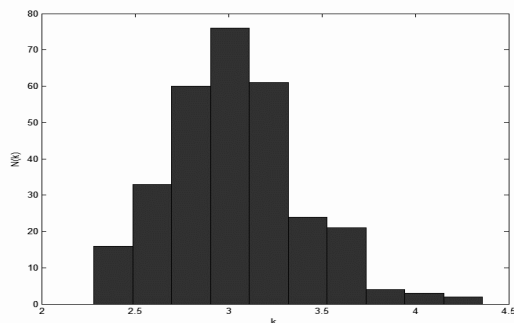


Рис. 2. Гистограмма оценок $\hat{k}$ при $n = 150$, $m = 6$, $r = 3$, $k = 3$.

Список литературы

1. Тимонин В. И. Оптимизация проведения предварительных исследований в теории форсированных испытаний // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2004. - № 1. – С. 23-33.
2. Тимонин В. И., Ермолаева М. А. Оценки Каплана Мейера в статистиках типа Колмогорова - Смирнова при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой // Электромагнитные волны и Электронные системы. – 2010. - №7. – С. 17-24

НИЖНИЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ БЕЗОПАСНОГО СРОКА ЭКСПЛУАТАЦИИ ТЕХНОГЕННО- ОПАСНЫХ ОБЪЕКТОВ

Г.С. Садыхов, О.В. Некрасова

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Пусть $\lambda(t)$ - интенсивность отказов объекта в момент времени t . Будем считать, что объект стареющий на интервале времени (τ, ∞) , если интенсивность отказов там как функция времени монотонно неубывающая. Кроме того, будем считать, что любой отказ объекта на этом интервале времени приводит к авариям, катастрофам, чрезвычайным ситуациям и т.д., т.е. рассматриваемый объект техногенно-опасный.

Рассмотрим малый интервал времени $(\tau, \tau + t)$, на котором надо оценить безопасность объекта. Если испытать даже большое количество однотипных объектов на этом интервале времени, то отказавших объектов может и не быть, тогда мы не сможем оценить безопасность.

В связи с этим возникает проблема: как оценить безопасный срок эксплуатации стареющего техногенно-опасного объекта на малых участках времени.

1. Пусть

$$P_{\tau}(t) = \frac{P(\tau+t)}{P(\tau)} \quad (1)$$

есть условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau, \tau+t)$, где $P(\cdot)$ - вероятность безотказной работы объекта в течение времени, указанного внутри скобок. Тогда при $\gamma \in (0, 1)$ величину

$$T_{\gamma}(\tau) = \sup\{t | P_{\tau}(t) \geq \gamma\}$$

называют гамма-процентной длительностью безопасной эксплуатации объекта сверх времени τ [1]. Очевидно, что

$$P_{\tau}(T_{\gamma}(\tau)) = \gamma. \quad (2)$$

Нами установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Для стареющего техногенно-опасного объекта на интервале времени (τ, ∞) гамма-процентная длительность безопасной эксплуатации сверх времени t имеет следующую оценку:

$$T_{\gamma}(t) \geq \frac{\ln \gamma}{\ln \gamma_0} T_{\gamma_0}(t), \quad (3)$$

где $t \geq \tau$; $\gamma > \gamma_0$.

В прикладных задачах теорема 1 позволяет сократить количество объектов для проведения традиционных ресурсных испытаний. Так, для оценки длительности $T_{0.99}(t)$ надо испытать не менее 100 однотипных объектов. Однако, используя теорему 1, можно испытать гораздо меньшее число объектов, например, 5 объектов и оценить длительность $T_{0.8}(t)$, а затем найти согласно (3) нижнюю границу для искомой длительности $T_{0.99}(t)$.

Таким образом, оценка (3) позволяет существенно сократить объем ресурсных испытаний.

Заметим, что оценка (3) непараметрическая и гарантированная, поскольку она справедлива для произвольного закона распределения ресурса стареющего объекта сверх времени t .

Возникает вопрос: существует ли конкретный закон распределения ресурса, для которого правая часть оценки (3) равна левой, т.е. достижима ли оценка (3) для рассматриваемого класса объектов?

Очевидно, что в противном случае практическая востребованность теоремы крайне низка и в таком случае надо искать достижимую оценку.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим объект, имеющий экспоненциальный закон рассматривания ресурса, т.е. $P(t) = e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ - постоянная величина интенсивности отказов. Тогда, согласно (1), имеем

$$P_{\tau}(t) = e^{-\lambda t},$$

откуда из (2) найдем

$$T_{\gamma}(\tau) = \frac{-\ln \gamma}{\lambda}.$$

Следовательно,

$$T_{\gamma}(\tau) = \frac{\ln \gamma}{\ln \gamma_0} T_{\gamma_0}(\tau).$$

Заменив время τ на t , получим, что правая часть (3) равна левой, что и доказывает достижимость оценки (3).

При $\gamma > \gamma_0$ имеем $T_{\gamma}(t) \leq T_{\gamma_0}(t)$, следовательно, оценка (3) на периоде старения объекта интерполяционная: поскольку она оценивает длительность безопасного срока эксплуатации объекта в направлении от большего значения $T_{\gamma_0}(t)$ к меньшему $T_{\gamma}(t)$.

Используя доказательство теоремы 1, можно аналогичным образом доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Для объектов, интенсивность отказов которых монотонно убывает как функция времени на интервале (t_1, t_2) , гамма-процентная длительность безопасного срока эксплуатации сверх времени t имеет следующую оценку:

$$T_{\gamma_0}(t) \geq \frac{\ln \gamma_0}{\ln \gamma} T_{\gamma}(t),$$

где $t \in (t_1, t_2)$; $\gamma > \gamma_0$.

Другими словами, на приработочном периоде эксплуатации заказанная оценка экстраполяционная, т.к. она оценивает длительность безопасного срока эксплуатации объекта в направлении от меньшего значения $T_{\gamma}(t)$ к большему $T_{\gamma_0}(t)$.

2. В прикладных задачах значение γ - это уровень безопасности объекта. Поэтому возникает вопрос: каковы принимаемые значения длительности безопасной эксплуатации объекта в окрестности «абсолютной» безопасности, т.е. при $\gamma \rightarrow 1 - 0$.

В связи с этим нами доказано следующее утверждение, справедливое для любых видов интенсивностей отказов, не обязательно имеющих монотонный характер изменения как функция времени.

Теорема 3. Справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \frac{T_{\gamma}(t)}{\ln 1/\gamma} = \frac{1}{\lambda(t)}, \quad (4)$$

где $\lambda(t) > 0$ - интенсивность отказов рассматриваемого объекта, $t > 0$.

Следствие. Пусть $\alpha = 1 - \gamma$ - риск эксплуатации объекта. Тогда при $\alpha \rightarrow +0$ длительность безопасного срока эксплуатации техногенно-опасного объекта сверх времени t приближенно равна

$$T_{1-\alpha}(t) \approx \frac{\alpha}{\lambda(t)}, \quad (t > 0). \quad (5)$$

Соотношение (5) вытекает из формулы (4) с учетом того, что $\ln(1-\alpha) \approx -\alpha$ при $\alpha \rightarrow +0$.

Другими словами, в окрестности «абсолютной» безопасности ($\alpha \rightarrow +0$) длительность безопасного срока эксплуатации сверх времени ($t > 0$), прямо пропорциональна риску опасности и обратно пропорциональна интенсивности отказов.

Для установления зависимости $T_\gamma(t)$ в окрестности наибольшей опасности ($\gamma \rightarrow +0$) нами доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{T_\gamma(t)}{-\ln \gamma} = \frac{1}{Z},$$

где

$$Z = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t), \quad t > 0.$$

Например, для экспоненциального закона распределения ресурса имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{T_\gamma(t)}{-\ln \gamma} = \frac{1}{\lambda},$$

в чем легко убедиться и непосредственно, т.к. для этого закона

$$\frac{T_\gamma(t)}{-\ln \gamma} \equiv \frac{1}{\lambda}, \quad (0 < \gamma < 1).$$

Таким образом, для техногенно-опасных объектов установлены нижние и предельные оценки длительности безопасного срока эксплуатации.

Список литературы

1. Садыхов Г.С. Показатель остаточного ресурса и его свойства// Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика, 1985, №4, с.98-102.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ТОРГОВЛИ

Н.В. Степанова

Алтайский экономико-юридический институт

Перед любой фирмой, производящей какой-либо товар, всегда встаёт проблема его сбыта. Эта проблема особенно важна для фирм, производящих товары, не подлежащие длительному хранению, так как перепроизводство товара может привести к потере им товарных качеств в течение торговой

сессии, и товар будет снят с реализации или подлежать уценке. Однако недостаточное производство товара приведёт к тому, что часть возможной прибыли будет недополучена, то есть к упущенной выгоде.

Эти проблемы возникают при поставке товара в торговые точки, принадлежащие фирме–производителю, а также у розничных торговцев, покупающих у оптового поставщика партию скоропортящегося товара для его реализации. Во всех этих ситуациях очень большое значение имеют ответы на следующие вопросы:

Какой должен быть объём партии, поставляемой или покупаемой для реализации?

По какой розничной цене должен продаваться этот товар?

Как должна меняться розничная цена в зависимости от остатка непроданного товара?

Как управлять ценой продажи продукции, чтобы к концу торговой сессии она была полностью реализована?

Все эти задачи надо решать при вполне естественном критерии оптимальности – максимизации прибыли, получаемой от реализации продукции. Пусть имеется некоторая скоропортящаяся продукция, которая должна быть продана в течение торговой сессии (например, дня). В противном случае товар снимается с реализации и пропадает. Продавец покупает партию товара объёма Q_0 по оптовой цене d и продает ее по розничной цене c . Ставится задача нахождения значений Q_0 и c , при которых средняя прибыль продавца будет максимальной.

Будем считать, что торговая сессия начинается в момент времени 0 и кончается в момент времени T , то есть она занимает интервал времени $[0, T]$. Обозначим через $Q(t)$, количество товара в момент времени t . Считаем, что $Q(0)=Q_0$ фиксировано. Предполагаем, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c(t))$, зависящей от розничной цены $c(t)$.

Покупатели покупают товар независимо друг от друга, и объём покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\}=a_1$ и $M\{\xi^2\}=a_2$.

В данной работе будет исследован общий случай, когда управление розничной ценой определяется соотношением

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T\phi(t/T)}. \quad (1)$$

Частные случаи исследованы в работах [1, 2].

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Процесс $Q(t)$ может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением

$$dQ(t) = -a_1 \lambda(c) dt + \sqrt{a_2 \lambda(c)} dw(t), \quad (2)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Объединяя (1) и (2) можно сказать, что диффузионная аппроксимация процесса $Q(t)$ имеет вид

$$dQ(t) = -\frac{Q(t)}{T\phi(t/T)}dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T\phi(t/T)}}dw(t). \quad (3)$$

Нами получены основные вероятностные характеристики процесса $Q(t)$, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть аппроксимирована прямой линией

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}. \quad (4)$$

Здесь c_0 имеет смысл некоторой «стандартной» цены, так что $\lambda(c_0) = \lambda_0$. Определено математическое ожидание выручки и проведена его оптимизация:

$$S = \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) (1 - e^{-\psi(1)}) \right] - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 e^{-2\psi(z)} \psi'^2(z) dz - \frac{a_2}{a_1^2 T} \int_0^{\tilde{c}} e^{-\psi(z)} \psi'^2(z) dz, \quad (5)$$

$$\psi(z) = \int_0^z \frac{dx}{\phi(x)}. \quad (6)$$

S представляет собой функционал от функции $\psi(z)$ и нам надо решить задачу $S \Rightarrow \max_{\psi(z)}$ с граничным условием $\psi(0) = 0$.

Решив стандартную задачу вариационного исчисления, получили вид функции $\phi(z)$.

Нами проведена оптимизация по объему партии товара выставленного на продажу:

$$Q_0 = \frac{a_2}{a_1} + (\lambda_0 + \lambda_1) \frac{a_1 T}{2\tilde{C}} + \frac{a_2}{2a_1 \tilde{C}} \left[\ln(1 - \tilde{C}) - \frac{\tilde{C}}{1 - \tilde{C}} \right], \quad (7)$$

$$\tilde{C} \approx 1 - \frac{c_0 a_2}{da_1^2 \lambda_1 T}.$$

Итак, мы получили закон управления ценой продажи в виде

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T\phi(t/T)}. \quad (8)$$

Параметр $\tilde{C}$ легко определить через характеристики торгового процесса, поэтому выведенные нами соотношения для $Q(0)$ и для $\tilde{C}$ могут быть использованы в процессе модернизации торговли.

Список литературы

1. Степанова Н.В. Определение оптимального объема партии скоропортящейся продукции / VIII Международная ФАМ'2009 конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Тезисы докладов. Красноярск, Сибирский федеральный Университет, 2009. С. 21, 114-115.

2. Степанова Н.В., Терпугов А. Ф. Об одном законе управления ценой продажи скоропортящейся продукции // VII Всероссийская конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам (29 февраля – 02 марта 2008 г.): Тезисы докладов / Под ред. к.ф.-м.н. Д.В. Семенов. Красноярск, Издательство Сибирского федерального университета. 2008. С. 90-91.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПЭЙНДЖЕРА ПРИ РАСЧЕТЕ КВАНТИЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОВОКУПНОГО УБЫТКА В РИСКОВОМ СТРАХОВАНИИ

В.И. Тимонин

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Метод Пэйнджера предназначен для вычисления распределения совокупного убытка в том случае, когда число страховых случаев N случайно, а распределение размера убытка в каждом страховом случае u одинаково и известно. При этом для определения точного распределения совокупного убытка U необходимо выполнение двух условий [1]:

- вероятности $p_n = P(N = n)$ наступления n страховых случаев (СС) должны удовлетворять рекурсивной формуле

$$n p_n = (n \cdot a + b) \cdot p_{n-1}, \quad (1)$$

- распределение размера убытка u (обычно считающееся непрерывным) должно быть аппроксимировано арифметическим дискретным распределением, то есть представлено в виде

$$f_k = P(u = k \cdot h), \quad k = \overline{0, K}, \quad \sum_{k=0}^K f_k = 1. \quad (2)$$

Здесь h - шаг дискретизации (величина h может быть разной в зависимости от вида страхования, например, при страховании в системе ОСАГО обычно $h = 1000$ руб.).

Условию (1) удовлетворяют три распределения – пуассоновское, биномиальное и отрицательно-биномиальное распределения. В дальнейшем изложение будет вестись в предположении пуассоновского распределения числа СС. Изменение формул на случай других упомянутых распределений не вызывает никаких затруднений. Для пуассоновского распределения

параметры рекурсии (1) равны $a = 0, b = \lambda$, где λ - параметр распределения Пуассона. Значение λ всегда определяется в виде $\lambda = Q \cdot p$, где Q - общая экспозиция (объем портфеля договоров), p - частота (вероятность) страховых случаев.

Для реализации условия (2) разработано несколько способов оптимальной дискретизации распределения [2], однако данный вопрос не является предметом исследования в работе. Будем предполагать, что дискретизация проведена тем или иным способом. Заметим лишь, что обычно в качестве дискретизируемого распределения размера убытка в страховании берется распределение с «тяжелым» правым хвостом (логарифмически – нормальное, Парето или их смесь).

Распределение совокупного убытка при выполнении (1), (2) также будет дискретным. Обозначим $g_k = P(U = k \cdot h), k = 1, 2, 3, \dots$

В [1] приведена рекурсивная формула расчета вероятностей g_k в общем случае (1), которая для пуассоновского распределения числа убытков принимает вид

$$g_k = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^k j \cdot f_j \cdot g_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad g_0 = \exp(-(1 - f_0) \cdot \lambda). \quad (3)$$

Трудность применения (3) заключается в том, что при большом объеме портфеля (и, следовательно, к значениям λ порядка нескольких сотен и более) значение g_0 становится настолько мало, что превышает возможности компьютера к представлению малых чисел. Это приводит к обнулению g_0 со всеми вытекающими последствиями для остальных g_k . В [1] предложен алгоритм, позволяющий обойти эту трудность, однако он также предлагает вычислять сами вероятности g_k , пусть и в несколько шагов.

Дело, однако, заключается в том, что для многих задач страхования (в частности, для вычисления рискованной надбавки при определении страховых тарифов) требуется знание не самих вероятностей g_k , а квантилей z_γ распределения U для больших значений $\gamma = 0,9; 0,95; 0,99$. В связи с этим очень актуальна задача разработки алгоритма вычисления z_γ , не требующего определения отдельных вероятностей g_k . В настоящей работе предлагается такой алгоритм. Попутно заметим, что применение центральной предельной теоремы для определения квантилей (то есть использование нормального распределения для аппроксимации распределения совокупного убытка) зачастую дает неприемлемую погрешность, особенно при больших дисперсиях размера убытка u .

Сформулируем сначала основную теорему.

Теорема. Значение вероятности $P(U \leq m \cdot h)$ равно m -ой координате вектора $\vec{S}^{(M)} = (s_0^{(M)}, s_1^{(M)}, \dots, s_M^{(M)})^T$, $m \leq M$, где вектор $\vec{S}^{(M)}$ можно получить M -кратным применением соотношения

$$\vec{S}^{(i)} = \vec{S}^{(i-1)} + \vec{x}^{(i)}, \quad (4)$$

в котором координаты $x_j^{(i)}$ вектора $\vec{x}^{(i)}$ равны

$$x_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq i \\ g^{(i)} \cdot f_{j-i} \cdot \lambda \cdot \frac{j-i}{j}, & i+1 \leq j \leq M \end{cases},$$

а множитель $g^{(i)} = s_i^{(i-1)} - s_{i-1}^{(i-1)}$.

Вектор $\vec{S}^{(0)}$ начальных условий имеет координаты $s_0^{(0)} = \exp(-\lambda \cdot (1 - f_0))$, $s_j^{(0)} = s_0^{(0)} \cdot f_j \cdot \lambda$, $1 \leq j \leq M$. Заметим, что $s_j^{(0)}$ может быть равен 0, если $j > K$ (см. формулу (2)).

Для численной реализации предложенного метода необходимо добавить следующее. Как отмечалось выше, при больших λ невозможно численное представление на компьютере $s_0^{(0)} = \exp(-\lambda \cdot (1 - f_0))$. По этой причине в начале вычислений следует взять в качестве начального условия $s_0^{(0)}$ любое представимое на компьютере число (например, $s_0^{(0)} = 1$). Затем, если на k -ом шаге значение $s_M^{(k)}$ станет больше заранее заданного большого числа (скажем, $s_M^{(k)} > e^{100}$), следует просто разделить вектор $\vec{S}^{(k)}$ на это число и далее без всяких изменений продолжить выполнение алгоритма. После выполнения заключительной M -ой итерации полученный вектор делится на число $\exp(\lambda \cdot (1 - f_0) - 100 \cdot L)$, где L - число делений на e^{100} , выполненных в процессе реализации алгоритма.

Приведенная выше теорема позволяет вычислять квантили точного распределения суммарного убытка для очень больших значений λ . В частности, для задач страхования гражданской ответственности ОСАГО проводились расчеты квантилей при экспозиции $Q = 100000$ и частоте страховых случаев $p = 0,05$, то есть $\lambda = 5000$.

Список литературы

1. Мак Т. Математика рискованного страхования. – М.: Олимп – Бизнес, 2005. – С.432.
2. Panjer H. J., Willmott G. Insurance Risk Models. – Schaumburg / Illinois.: Society of Actuaries, 1992. – P. 531.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВЕЧНОМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС MERZLOTA

И.Б. Бахолдин

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

1. Математическая постановка задачи. В связи с тем, что при расчетах вечномерзлых грунтов имеются разрывы типа фазовых переходов и контактные разрывы на границах раздела различных сред (литологические разности) в качестве базового уравнения при исследовании процессов в вечномерзлых грунтах с физической точки зрения целесообразно рассматривать уравнение сохранения энергии в интегральной форме, которое носит фундаментальный характер и выполняется и при наличии разрывных решений

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V H dv = - \iint_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma + \iiint_V s dv. \quad (1)$$

Здесь H – внутренняя энергия среды, ее еще иногда называют энтальпией, $\vec{q}$ – поток тепла, s – плотность объемных источников тепла. Поток тепла определяется из закона теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} u. \quad (2)$$

Здесь $u(x, y, z, t)$ – температура среды, λ – коэффициент теплопроводности.

Из уравнения (1) выводятся соотношения на разрывах типа фазовых переходов и контактных разрывах с применением этого уравнения к некоторому малому объему:

$$U(H_2 - H_1) = \lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \right)_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \right)_1, u_1 = 0, u_2 = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \right)_1 - \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \right)_2 = 0, u_1 = u_2. \quad (4)$$

Здесь U – скорость разрыва в направлении перпендикулярном его поверхности, индексы 1 и 2 обозначают соответствующие величины по разные стороны от разрыва. Внутренняя энергия на фазовом переходе терпит скачок. Таким образом, ищется решение, состоящее из гладких областей, разделенных поверхностями разрыва, на которых выставлены указанные выше граничные условия. Заметим, что такой подход является достаточно универсальным и применяется и в других областях, например в газовой динамике для описания ударных волн. В общем случае одних только условий на разрывах оказывается не достаточно для корректной постановки задачи [1] и требуется введение дополнительных условий, называемых условиями эволюционности, однако это не требуется в тепловых задачах.

В случае непрерывных решений при помощи теоремы Гаусса-Остроградского из уравнения (1) выводится дифференциальное уравнение теплопроводности в энтальпийной форме, а также обычное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} u \right) + s(x, y, z), \quad (5)$$

$$c_v \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} u \right) + s(x, y, z). \quad (6)$$

Здесь $c_v = dH/du = \rho c$, объемная теплоемкость, c - удельная теплоемкость, ρ - плотность. В случае решений с разрывами уравнения (5) и (6) не равноценны уравнению (1), поскольку из этих уравнений невозможно получить условия на разрывах (3) и (4). Но математической литературе существует понятие обобщенного решения, которое формально вводится на основе уравнения (5) как предел разностного уравнения:

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} u^{n+1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} u^{n+1} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} u^{n+1} \right) + s(x, y, z), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (7)$$

Здесь предполагается, что сделана некоторая дискретизация по времени. Доказывается, что при таком введении обобщенного решения задача корректно поставлена по крайней мере в одномерном случае. Доказывается также некорректность постановки задачи в случае следующего варианте:

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} u^n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} u^n \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} u^n \right) + s(x, y, z), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (8)$$

Однако задача становится корректно поставленной, если для описания фазовых переходов применяется не разрывная функции внутренней энергии, а непрерывная, линейно сглаженная на некотором температурном интервале. Такое сглаживание называется аппроксимацией Исиды. При этом при стремлении к нулю длины интервала сглаживания решение (8) стремится к решению (7). Подобный подход также применяется к широкому классу уравнений.

2. Построение численной схемы. В связи с необходимостью выполнения интегрального закона сохранения энергии в численном решении целесообразно использовать для построения численной схемы уравнение (1), а не дифференциальные уравнения (5) и (6), хотя дифференциальное уравнение (5) при этом аппроксимируется тоже. Получающаяся при этом схема оказывается консервативной. Пусть расчетная ячейка имеет вид параллелепипеда. Узлы сетки, соответствующие вершинам параллелепипеда обозначаются целыми числами. Значения температуры, коэффициентов теплопроводности, теплоемкости относятся к серединам расчетных ячеек, эти узлы обозначаются полуцелыми индексами. Там задаются координаты x_i, y_i, z_i , шаги сетки $h_{xi+1/2} = x_{i+1} - x_i, h_{yj+1/2} = y_{j+1} - y_j, h_{zk+1/2} = z_{k+1} - z_k$. После применения уравнения (1) к расчетной ячейке получается соотношение:

$$h_{xi+1/2}h_{yj+1/2}h_{zk+1/2}(H_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n) = \{[h_{yj+1/2}h_{zk+1/2}(q_{i+1,j+1/2,k+1/2} - q_{i,j+1/2,k+1/2}) + h_{yj+1/2}h_{zk+1/2}(q_{i+1/2,j+1,k+1/2} - q_{i+1/2,j,k+1/2}) + h_{xi+1/2}h_{yj+1/2}(q_{i+1/2,j+1/2,k+1} - q_{i+1/2,j+1/2,k})] + h_{xi+1/2}h_{yj+1/2}h_{zk+1/2}F_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\}\tau$$

После деления на $h_{xi+1/2}h_{yj+1/2}h_{zk+1/2}\tau$ получается шаблон для численных схем:

$$(H_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n) / \Delta t = [(q_{i+1,j+1/2,k+1/2} - q_{i,j+1/2,k+1/2}) / h_{x+1/2i} + (q_{i+1/2,j+1,k+1/2} - q_{i+1/2,j,k+1/2}) / h_{yj+1/2} + (q_{i+1/2,j+1/2,k+1} - q_{i+1/2,j+1/2,k}) / h_{zk+1/2}] + F_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$$

Если используются значения температуры с нижнего слоя, то получается чисто явная схема, заметим, что она соответствует также подходу (8), если с верхнего слоя – то чисто неявная, она соответствует подходу (7). Явная схема требуют выполнения условия устойчивости на временной шаг. Неявная схема абсолютно устойчива, но требует построения специальных алгоритмов для решения неявных уравнений. В соответствии с (7) при использовании неявной схемы можно получить обобщенное решение с фазовыми переходами, если использовать разрывную функцию для внутренней энергии. При использовании же явной схемы требуется сглаживание функции энтальпии, но это увеличивает расчетную зону структуры разрыва, следовательно, снижает точность расчета. Практика численных расчетов (причем не только тепловых) показывает, что на грубых сетках сглаживание разрывов при использовании явной консервативной схемы не обязательно, для тепловых задач это подтверждается наличием стандарта РСН 67-87 [2]. Заметим, что некорректность постановки с разрывом для явной схемы и ее корректность для неявной схемы точно коррелирует с таким понятием как монотонность численных схем: неявная схема монотонна, явная – нет [3]. Применительно к тепловым задачам монотонности нет также у частично неявной схемы, берется полусумма аппроксимаций по верхнему и нижнему слою и у метода переменных направлений. Для сквозных расчетов разрывов без их размазывания требуется монотонность численной схемы.

Потоки вычисляются путем аппроксимации закона Фурье:

$$q_{i,j+1/2,k+1/2} = \lambda_{i,j+1/2,k+1/2}(u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}) / h_i, \quad h_i = (h_{i+1/2} + h_{i-1/2}) / 2.$$

Приводится только аппроксимация потока в направлении оси x , остальные потоки аппроксимируются аналогично.

Численные значения коэффициента теплопроводности могут задаваться различными способами: непосредственно задаются в полуцелых узлах, находятся путем интерполяции по целым узлам (формулы выводятся с применением интегро-интерполяционного метода [4], исходя из гладкости решения) или находятся путем применения так называемого «наилучшего» способа определения коэффициента теплопроводности [5]

$$q_{i,j+1/2,k+1/2} = 2(u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}) \left(\frac{h_{xi+1/2,j+1/2,k+1/2}}{\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{h_{xi-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\lambda_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right).$$

Приведенная формула выводится с применением метода контрольного объема [6], исходя из наличия разрыва на границе ячейки. В этом случае, если границы разделов различных сред совпадают с границами расчетных ячеек, то соотношения на контактном разрыве аппроксимируются точно. Эти методы при применении немонотонных численных схем имеют некоторые отличия в степени «тряски» на разрывах.

3. Особенности программного комплекса MERZLOTA. Был разработан программный комплекс MERZLOTA, предназначенный для прогноза поведения вечномерзлых грунтов при строительстве на них различных объектов. Расчет идет с применением явного варианта описанной выше численной схемы, использование неявного варианта предполагается в будущем. Применяется также «наилучшая» аппроксимация коэффициента теплопроводности, но есть вариант и с интерполяцией. Для сглаживания скачка внутренней энергии на фазовом переходе применяется аппроксимация Исида. При этом в качестве функции зависимости внутренней энергии от температуры используются любые монотонные кусочно-линейные функции, что позволяет аппроксимировать произвольные модели фазовых переходов, где имеется смесь льда и незамерзшей воды, что актуально для засоленных грунтов. Таким образом, аппроксимация произвольных моделей и сглаживание функции энтальпии при необходимости расчетов на мелких сетках осуществляется одним способом. Программа допускает произвольное число блоков или слоев с грунтами и материалами с различными тепловыми свойствами. В программе предусмотрено моделирование термостабилизаторов посредством введения в определенных ячейках заданной тепловой мощности, а также моделирование термостатизаторов как труб, на границах которых ставится третье граничное условие. Программа показала свою эффективность для расчетов широкого круга задач, связанных с расчетами сооружений газового комплекса.

Список литературы

1. *Бахолдин И.Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. – М.:Физматлит, 2004. 318с.
2. РСН 67-87. Инженерные изыскания для строительства. Составление прогноза изменений температурного режима вечномерзлых грунтов численными методами.
3. *Годунов С.К., Рябенский А.С.* Разностные схемы. -М.:Наука, 1977. – 440 с.
4. *Самарский А.А., Вабищевич. П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784с.
5. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. Москва. Издательство Московского физико-технического института. 1994.
6. *Пантанкар С.В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М: Энергоатомиздат. 1984. 152 с.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛЕНТОЧНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В КАНАЛАХ

Ю.И. Димитриенко¹⁾, А.А Захаров¹⁾, А.С. Абакумов²⁾,

¹⁾ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

²⁾ Институт Космических Исследований Российской Академии Наук

В работах [1–2] был разработан метод ленточных адаптивных сеток (ЛАС), предназначенный для численного моделирования движения газовых потоков в областях со сложной геометрией. В настоящей работе осуществлено развитие этого метода на случай течений вязкого теплопроводного газа в областях сложной формы с криволинейными границами [3] типа областей каналов сверхзвуковых воздухозаборников [1–3], которые учитывают комбинированное (внутреннее и внешнее) течение и позволяют вести расчет с заранее неизвестной формой ударных волн и условий на скачках.

Во всей области решается общая система уравнений вязкого теплопроводного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{E} - \mathbf{T}_v) = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{v} - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

К этим уравнениям присоединяются определяющие соотношения вязкого теплопроводного газа: $p = R\rho\theta$, $e = c_v\theta$, $E = e + |\mathbf{v}|^2/2$, $\mathbf{q} = -\lambda\nabla\theta$, $\mathbf{T}_v = \mu_1(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + \mu_2(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T) = {}^4\mathbf{M} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$, где $\mathbf{T}_v$ – тензор вязких напряжений в газе, ${}^4\mathbf{M}$ – тензор вязкости, μ_1 , μ_2 – коэффициенты вязкости газа, λ – коэффициент теплопроводности газа, $\mathbf{q}$ – вектор потока тепла, ρ – плотность газа, t – время, E – полная энергия газа: $E = c_v\theta + |\mathbf{v}|^2/2$, c_v – теплоёмкость при постоянном объеме, θ – температура газа, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, p – давление, R – газовая постоянная, $\mathbf{E}$ – метрический тензор.

Система уравнений (1) имеет второй порядок производных, и для ее решения применялся модифицированный метод ЛАС. Модификация метода ЛАС осуществлялась на основе метода расщепления по физическим процессам. На каждом временном шаге вычисления разбивались на 2 этапа:

1) На первом этапе, с помощью метода ЛАС решается система (1) без вязкости и теплопроводности, которая записывается в адаптивных криволинейных координатах X^j :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{g'} \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \hat{P}_{\alpha}^j \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \rho \hat{v}^{\alpha} \right) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g'} \rho \hat{v}^{\gamma}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\hat{P}_{\alpha}^j \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{R}^{\alpha\beta} \right) \delta_{b\gamma} + \frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{R}^{\alpha\beta} \hat{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\gamma} \right) &= 0, \\
\frac{\partial \sqrt{g'} \rho E}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \hat{P}_{\alpha}^j \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \rho \hat{v}^j (E + \frac{p}{\rho}) \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\hat{P}_{\alpha}^j$ – якобиева матрица, g' – якобиан, H_{α} – параметры Ламе, $\hat{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\gamma}$ – символы Кристоффеля, $\hat{R}^{\alpha\beta} = \rho \hat{v}^{\alpha} \hat{v}^{\beta} + p \delta^{\alpha\beta}$, $\hat{v}^i$ – физические компоненты вектора скорости в ортонормированном базисе $\hat{\Gamma}^i$ (см. подробнее в [1]).

2) На втором этапе решается параболическая часть системы (1) без конвективных членов и без уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned}
\rho \sqrt{g'} \frac{\partial \hat{v}^{\gamma}}{\partial t} &= \sum_{\alpha, s=1}^3 \left(\hat{P}_{\alpha}^s \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{T}^{\alpha\gamma} \right) + \frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{T}^{\alpha s} \hat{\Gamma}_{s\alpha}^{\gamma} \right) \\
\rho \sqrt{g'} \frac{\partial e}{\partial t} &= \sum_{\alpha, s, \sigma=1}^3 \hat{P}_{\alpha}^s \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \lambda \hat{P}_{\alpha}^{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial X^{\sigma}} \right) + \sqrt{g'} \omega^* \\
\omega^* &= \sum_{\alpha, \beta, \varepsilon, \omega, s, \sigma=1}^3 \frac{\bar{M}^{\alpha\beta\varepsilon\omega}}{H_{\alpha} H_{\varepsilon}} \left(\hat{P}_{\alpha}^s \frac{\partial \hat{v}_{\beta}}{\partial X^s} + \hat{v}_{\beta} \hat{\Gamma}_{s\alpha}^{\beta} \right) \left(\hat{P}_{\varepsilon}^{\sigma} \frac{\partial \hat{v}_{\omega}}{\partial X^{\sigma}} + \hat{v}_{\omega} \hat{\Gamma}_{\sigma\varepsilon}^{\omega} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\bar{M}^{\alpha\beta\varepsilon\omega}$ – компоненты тензора вязкости в декартовом базисе. Эта система может быть записана в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial U_s}{\partial t} = \Lambda U_s + F_s, \tag{4}$$

здесь дифференциальный оператор имеет вид:

$$\Lambda U_s = \hat{P}_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial X^k} \left(\sum_{z=1}^5 A_{sz}^{ij} \hat{P}_{\alpha}^n \frac{\partial U_z}{\partial X^n} \right) + \sum_{z=1}^5 B_{sz}^j \hat{P}_{\alpha}^n \frac{\partial U_z}{\partial X^n} + \sum_{z=1}^5 C_{sz} U_z$$

и обозначены координатные столбцы: $U_s = (v_1, v_2, v_3, c_v \theta)^T$, $F_s = (0, 0, 0, \omega^*)^T$.

Для численного решения полученной системы квазилинейных параболических уравнений (4) применялся метод, основанный на расщеплении дифференциальных операторов по координатным направлениям ($\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$) и использовании метода скалярной прогонки вдоль этих направлений. Использовались экономичные методы аппроксимации дифференциальных операторов, пригодные для уравнений с переменными коэффициентами. В результате была получена 4-х шаговая разностная схема, соответствующая цепочке «одномерных» уравнений:

$$\begin{cases} \rho^{m+1/3} (U^{m+1/2} - U^{m+1/3}) = \frac{\Delta t}{2} \Lambda_1 U^{m+1/2}, \\ \rho^{m+1/3} (U_s^{m+2/3} - U_s^{m+1/2}) = \frac{\Delta t}{2} \Lambda_2 U_s^{m+2/3}, \\ \rho^{m+1/3} (U_s^{m+5/6} - U_s^{m+2/3}) = \frac{\Delta t}{2} \Lambda_3 U_s^{m+5/6}, \\ \rho^{m+1/3} (U_s^{m+1} - U_s^{m+1/3}) = \Delta t (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) U_s^{m+5/6} + F_s^{m+1/3} \Delta t, \end{cases} \quad (5)$$

где $U^{m+1/3}$ – значения функций консервативных переменных после первого этапа метода расщепления по физическим процессам, $U^{m+1/2}$, $U^{m+2/3}$, $U^{m+5/6}$, U^{m+1} – значения функций на промежуточных шагах разностной схемы, F_s – вектор правой части. Первые 3 разностных уравнения решаются методами прогонки относительно $U^{m+1/2}$, $U^{m+2/3}$, $U^{m+5/6}$ соответственно, а последнее уравнение – по явной схеме относительно U^{m+1} .

Постановка граничных условий на границах жесткой стенки, сверхзвукового входа и выхода потока, границе симметрии, а также начальных условий для системы уравнений вязкого газа (1) имела классический вид [1–2].

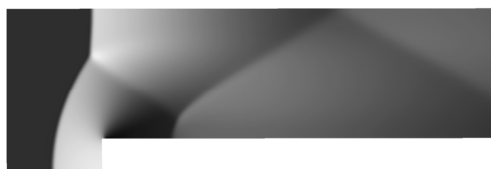
Численные расчеты были проведены для задачи сверхзвукового течения газа в канале прямоугольного сечения со ступенькой. Число М было выбрано равным $M=3$. На рис. 1–3 показаны сравнительные результаты численного моделирования для случая идеального газа (расчет только первого этапа) и вязкого газа на установившемся режиме. Учет вязкости приводит к качественному изменению картины течения газа в канале: ударные волны в вязком газе размазываются, и возникает новая система скачков функций, обусловленная особенностями течения газа вследствие условий прилипания газа на твердых поверхностях.



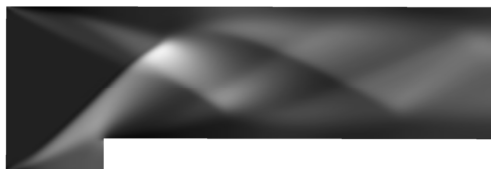
идеальный
газ

вязкий газ

Рис.1. Продольная компонента скорости газа в канале.



идеальный
газ



вязкий газ

Рис.2. Распределение плотности газа в канале.



идеальный
газ



вязкий газ

Рис.3. Распределение температуры в канале.

Был проведен ряд исследований с различными разностными сетками: 1) крупной сеткой 50x150 (6501 узлов), 2) уменьшенной сеткой 120x150 (15391 узлов), 3) мелкой сеткой 200x300 (50901 узлов). Было установлено, что при крупной сетке, решение получается не физическим: поток газа тормозится на входе в канал и не протекает в него. Расчеты для уменьшенной сетки, для которой измельчение проводилось по высоте, показаны на рис.1–3, для нее результаты получались физическими, картина течения отражала структуру скачков уплотнения и отраженных скачков в канале. Если рассмотреть более мелкую сетку 3) то решение имеет такой же качественный характер, как и для сетки 2), улучшения заключаются в более точной аппроксимации значений и в уменьшенном погрешное.

Проводились также расчеты со сгущающимися (неравномерными) сетками, в которых сгущение производилось в окрестности ступеньки по одному или двум координатным направлениям. Было установлено, что такое сгущение искажает решение и не приводит к повышению точности результатов. Результаты тестов проведенных на различных геометриях показали, что для

расчета следует выбирать максимальный шаг по времени, так как его измельчение не улучшает расчет, а лишь приводит к увеличению времени расчета.

В целях сокращения времени вычислений было принято решение применить алгоритм распараллеливания программного кода. Так как распараллеливание на основе библиотек с распределенной памятью (например MPI) требует разработки оптимальной декомпозиции геометрии и привлечения мощной многопроцессорной техники, то было применено распараллеливание на основе библиотеки OpenMP, которая предназначена для распараллеливания программ на машинах с общей памятью, в том числе и на персональных многоядерных компьютерах. OpenMP реализует параллельное выполнение циклов с независимыми вычислениями. В данной программе к таким циклам относятся циклы вычисления газодинамических параметров на основе разностных аналогов, которые занимают наибольшую часть расчетного времени. В табл.1 приведены временные затраты рассмотренной задачи «о ступеньке» для персонального компьютера с различным числом задействованных ядер процессора.

Таблица 1
Временные затраты (количество узлов – 15391).

Кол-во ядер	Время расчета	Время в сек.	Кол-во врем. слоев в сек.
1	06 ч. 47 мин. 21 сек.	24468	5.45
2	04 ч. 20 мин. 33 сек.	15631	8.53
3	03 ч. 19 мин. 14 сек.	11958	11.15
4	02 ч. 54 мин. 43 сек.	10482	12.72

В результате применения описанной техники распараллеливания было достигнуто более чем 2-кратное сокращение машинного времени расчета при использовании 4-х ядерных компьютеров.

Список литературы

1. *Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров.* Метод ленточных адаптивных сеток в газовой динамике. -М.: Изд-во НТЦ «Университетский», 2008. -175 с.
2. *Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров.* Разработка метода ленточных адаптивных сеток для решения трехмерных задач течения газов в воздухозаборниках // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки. - 2006. №. 3. - С. 44-56.
3. *Ю.И. Димитриенко, С.Г. Изотова, С.Н. Ануфриев, А.А. Захаров.* Численное моделирование трехмерных газодинамических процессов в камерах сгорания РДТТ на основе иметода геометрически-адаптивных сеток // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки.- 2005. №.3. - С. 45-58.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНИКОВ С УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРЕГРАДАМИ

Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Беленовская, М.А. Воронцова, А.Ю. Дзагания
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Работа посвящена численному моделированию динамических процессов проникания ударников в преграды, выдерживающими до разрушения большие упруго-пластические деформации (грунты и определенные горные породы, некоторые типы сплавов).

Рассмотрим универсальную систему законов сохранения в лагранжевой (отсчетной) конфигурации, состоящую из уравнения неразрывности, уравнения движения, кинематического уравнения, динамического уравнения совместности деформаций и определяющих соотношений, соответствующих модели анизотропной упруго-пластической среды с конечными деформациями [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} / \rho &= \det \mathbf{F} = \Delta, & \dot{\rho} \frac{d}{dt} \mathbf{v} &= \dot{\nabla} \cdot \mathbf{P}, & \frac{d}{dt} \mathbf{u} &= \mathbf{v}, & \frac{d}{dt} \mathbf{F}^T &= \dot{\nabla} \otimes \mathbf{v}, \\ \frac{d}{dt} \overset{\vee}{\mathbf{T}} &= {}^4\mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot (\dot{\nabla} \otimes \mathbf{v})^T - \frac{d}{dt} \mathbf{C}^p), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{C}^p &= \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Y_{\gamma}} \frac{d\lambda_{\beta}}{dt} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial Y_{\gamma}} {}^4\mathbf{A}_{(\gamma)} \cdot (\overset{\vee}{T} - H_{\gamma} \cdot \mathbf{C}^p), \\ f_{\beta} &= f_{\beta}(Y_1^p, \dots, Y_n^p), & \beta &= 1, \dots, N, & \mathbf{P} &= \Delta \overset{\vee}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{P}$ - первый тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, $\overset{\vee}{\mathbf{T}}$ - тензор истинных напряжений Коши, $\overset{\vee}{\mathbf{T}}$ - энергетический тензор напряжений, $\dot{\rho}$ и ρ - плотность в отсчетной и актуальной конфигурации, $\mathbf{F}$ - градиент деформаций, $\mathbf{v}$ - вектор скорости, $\mathbf{u}$ - вектор перемещений, $\mathbf{C}^p$ - энергетический тензор пластических деформаций. Определяющие соотношение системы (1) соответствуют модели теории анизотропного пластического течения (ассоциированный закон). H_{γ} , (Y_{γ}^p) - параметры пластического упрочнения, зависящие от спектральных инвариантов (Y_{γ}^p) тензора пластических деформаций $\mathbf{C}^p$, вид этих инвариантов, так же как и вид тензоров ${}^4\mathbf{A}_{(\gamma)}$ определяется только типом анизотропии рассматриваемой среды, λ_{β} - параметры нагружения, f_{β} - функции пластичности (число их определяется типом анизотропии и моделью поверхности пластичности), а ${}^4\mathbf{M} = {}^4\mathbf{M}^0 / \Delta$, где ${}^4\mathbf{M}^0$ - тензор констант упругости.

Система уравнений (1) записывается отдельно для ударника и преграды, если преграда является многослойной, то для каждого ее слоя записывается своя система (1). Граничные условия на поверхности контакта ударника и преграды, а также на границе слоев преграды предполагаются идеальными без проскальзывания и отсчетной конфигурации имеют вид:

$$[\mathbf{v}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad \overset{\circ}{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad (2)$$

где $\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности. Если же происходит отскок ударника от преграды, то на поверхности контакта Σ имеет место условие: $\vec{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0$. Это же условие имеет место на неконтактирующих поверхностях преграды и ударника.

Присоединяя к системе уравнений (1), (2) начальные условия:

$$t=0: \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad T=0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}^p = 0, \quad (3)$$

получаем постановку динамической задачи теории больших анизотропных упруго-пластических деформаций.

Для численного решения задачи (1)-(3) рассматривался случай прямого соударения, который позволяет ограничиться рассмотрением осесимметричной (двумерной) задачи. Будем далее полагать, что ударник является изотропным упругим, т.е. для него пластические деформации отсутствуют $\varepsilon_{ij}^p = 0$. Преграду будем считать многослойной: первый слой (по отношению к ударнику) является изотропной упруго-пластической средой, а второй - упруго-пластической трансверсально-изотропной среды. Для трансверсально-изотропных слоев определяющие соотношения в физических координатах для осесимметричного случая записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial t} &= \frac{1}{2} S_2 (T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2 (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)) + \frac{1}{2} S_3 (T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3 (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)), \\ \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial t} &= \frac{1}{2} S_2 (T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2 (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)) - \frac{1}{2} S_3 (T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3 (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)), \\ \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial t} &= S_1 (T_{zz} - H_1 \varepsilon_{zz}^p), \quad \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} = S_4 (T_{rz} - H_4 \varepsilon_{rz}^p), \end{aligned} \quad (4)$$

здесь:

$$\begin{aligned} S_\gamma &= \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Y_\gamma} \frac{d\lambda_\beta}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial Y_\gamma}, \quad \gamma = 1, \dots, 4 \quad Y_1 = T_{zz} - H_1 \varepsilon_{zz}^p, \quad Y_2 = T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2 (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p), \\ Y_3 &= (1/\sqrt{2}) |T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_2 (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)|, \quad Y_4 = (1/\sqrt{2}) |T_{rz} - H_4 \varepsilon_{rz}^p|. \end{aligned} \quad (5)$$

Для функций H примем модель степенного упрочнения:

$$H_1 = H_1^0 |\varepsilon_{zz}^p|^{-n_1}, \quad H_2 = H_2^0 |\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p|^{-n_2}, \quad H_3 = H_3^0 |\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p|^{-n_3}, \quad H_4 = H_4^0 |\varepsilon_{rz}^p|^{-n_4} \quad (6)$$

где H_γ^0 и n - константы.

Для трансверсально-изотропной среды со слоистой структурой, ортогональной к оси OX^3 , функции f_γ зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} N=2, \quad 2f_1 &= (Y_1 / \sigma_{1S})^2 + \int_0^t (Y_1(\tau) / q_{1S}(\tau))^2 d\tau - 1 = 0, \\ 2f_2 &= \sum_{\gamma=3}^4 ((Y_\gamma / \sigma_{\gamma S})^2 + \int_0^t (Y_\gamma(\tau) / q_{\gamma S}(\tau))^2 d\tau) - 1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\sigma_{\gamma S}$ - первоначальные динамические пределы текучести, $q_{\gamma S}(\tau)$ - функции, описывающие изменение пределов текучести в процессе нагружения (в частности эти функции описывают различие статических и динамических пределов текучести). Тогда функции S_γ имеют вид: $S_\gamma = (1/\sigma_{\gamma S}^2) \partial \lambda_\gamma / \partial t$, $\gamma = 1, \dots, 4$.

Для изотропных слоев определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial t} &= \frac{1}{3} S (2T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - T_{zz} - H \varepsilon_{rr}^p), & \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial t} &= \frac{1}{3} S (2T_{\varphi\varphi} - T_{rr} - T_{zz} - H \varepsilon_{\varphi\varphi}^p) \\ \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial t} &= \frac{1}{3} S (2T_{zz} - T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H \varepsilon_{zz}^p), & \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} &= S (T_{rz} - H \varepsilon_{rz}^p), & S &= \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_s^2}\end{aligned}\quad (8)$$

Параметр нагружения для изотропных сред находим из уравнения:

$$\dot{\lambda} = \pm \frac{Y_p^* \sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad Y_p^* = \frac{1}{2} \left((\dot{\varepsilon}_{rr}^p - \dot{\varepsilon}_{zz}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p - \dot{\varepsilon}_{zz}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p - \dot{\varepsilon}_{rr}^p)^2 + 6(\dot{\varepsilon}_{rz}^p)^2 \right) \quad (9)$$

параметр упрочнения H задается также в степенном виде:

$$H = H_0 Y_p^{-n_0}, \quad Y_p^2 = \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^p)^2 + 6(\varepsilon_{rz}^p)^2 \right) \quad (10)$$

где H_0 и n_0 - константы, а уравнение поверхности пластичности задается в виде модели типа Губера-Мизеса:

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{3} (Y_H / \sigma_s)^2 + \int_0^t (Y_H(\tau) / q_{HS}(\tau))^2 d\tau - 1, \\ Y_H^2 &= \frac{1}{2} \left((T_{rr} - T_{zz} - H(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{zz}^p))^2 + (T_{\varphi\varphi} - T_{zz} - H(\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{zz}^p))^2 + (T_{zz} - T_{\varphi\varphi} - H(\varepsilon_{zz}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p))^2 + 6(T_{rz} - H \varepsilon_{rz}^p)^2 \right)\end{aligned}\quad (11)$$

Процесс зарождения и распространения трещин моделировался следующим образом.

Этап зарождения трещин. В процессе непрерывного деформирования в каждой расчетной точке ударника и мишени проверяется условия отсутствия разрушения: $\pi_\alpha < 1$, где π_α - параметры повреждаемости материала, представляющие собой функции от инвариантов тензора истинных напряжений Коши $\pi_\alpha = \pi_\alpha(Y_\beta(T_{ij}))$. Для изотропных материалов в качестве параметров повреждаемости была принята следующая модель:

$$\begin{aligned}\pi &= (Y_T^+ / \sigma_T^*)^2 + (Y_T^- / \sigma_C^*)^2 + (Y_T / \sigma_s^*)^2 / 3, \quad Y_T^+ = \frac{1}{2} (Y_T + |Y_T|), \quad Y_T^- = \frac{1}{2} (|Y_T| - Y_T), \\ Y_T &= \frac{1}{2} \left((T_{rr} - T_{zz})^2 + (T_{\varphi\varphi} - T_{zz})^2 + (T_{zz} - T_{\varphi\varphi})^2 + 6T_{rz}^2 \right), \quad Y_T = \frac{1}{3} (T_{rr} + T_{zz} + T_{\varphi\varphi}),\end{aligned}\quad (12)$$

где σ_T^* , σ_C^* , σ_s^* - пределы прочности на растяжении, сжатие и сдвиг.

Этап распространения трещин. Если в какой-либо расчетной точке выполняется условие: $\pi_\alpha \geq 1$, то это означает, что в ней происходит кумуляция микротрещин и зарождение макротрещины, которая затем начинает расти. При численном счете зарождение макротрещины моделируется обнулением напряженного состояния в данной расчетной точке: вместо определяющих соотношений упруго-пластичности в ней задаются следующие условия: $T_{ij} = 0$.

Распространение трещины в мишени (или ударнике) происходит, если после выполнения предельного условия $\pi_\alpha(x_*^i, t_*) \geq 1$ в точке x_*^i в момент времени

t_* в какой-либо из ее соседних точек y_*^i в момент времени $t_* + \Delta t$ реализуется тоже самое условие: $\pi_\alpha(y_*^i, t_* + \Delta t) \geq 1$. В этом случае происходит прирост трещины на величину $\Delta x_*^i = y_*^i - x_*^i$.

Для численного интегрирования задачи (1)-(3) был применен метод ленточных адаптивных сеток [1-3]. Рассматривалась задача о прямом ударе ударника по многослойной преграде, состоящей из 3 слоев: первый и второй слои представляли собой грунты различной плотности (изотропные среды), а третий – железобетонную плиту (трансверсально-изотропную среду). Ударник считался изотропной упругой средой. Начальная скорость ударника по оси OZ в момент встречи с преградой при нормальном ударе была выбрана равной 600 м/с.

Ниже на рис.1 представлены некоторые из полученных результатов расчетов. Отметим некоторые особенности проведенного численного моделирования процесса проникания.

Разрушение грунта осуществлялось, как описано выше, путем обнуления соответствующих компонент тензора напряжений в зоне разрушения. Наблюдалась локализация процесса образования трещин в грунте в зоне максимальных сдвиговых напряжений - в окрестности острия ударника.

Похожий характер имел место и при разрушении ж/б -плит, однако, первое разрушение начиналось достаточно рано- когда ударник еще не успевал полностью проникнуть в грунт. Причиной этого разрушения являлось откольное разрушение плиты вследствие прохождения первичной волны сжатия по преграде, которая отразившись от тыльной ее поверхности вызывала межслойное разрушение в ж/б плите. Характер этого разрушения носил вид типичной межслойной откольной трещины.

По мере проникания ударника в ж/б плиту начиналось дополнительное разрушение плиты, которое также происходило в зоне максимальных межслойных напряжений, возникающих в окрестности «носа» ударника.

На рис.1 показано распределение компоненты тензора напряжений Коши T_{zz} в преграде в различные моменты времени. Нормальная скорость ударника по мере проникания в преграду уменьшается и в момент входа в ж/б плиту ее значение составляет примерно 387 м/с. После полного проникания в преграду скорость ударника составляла примерно 253 м/с.

Выводы. В рамках проведенных исследований разработана уточненная модель динамического деформирования изотропных и трансверсально-изотропных сред при больших деформациях, учитывающая эффекты зависимости пределов пластичности от предыстории нагружения. Проведенные численные исследования позволяют говорить о возможности применения данной модели для прогнозирования физических механизмов взаимодействия ударников с сложными преградами.

Список литературы

1. Димитриенко Ю.И. Анизотропная теория конечных упруго-пластических деформаций.- Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки.- №2.-2003.- с.47-61.
2. Димитриенко Ю.И., Беленовская Ю.В. Численное моделирование процессов пробивания перспективных материалов.- В. Сб. Аэрокосмические технологии.-М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана.- 2002, с. 78-84.
3. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. - М.: Физматлит. - 2010.- 624 с.

МЕТОД ЛЕНТОЧНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК НА ОСНОВЕ СХЕМ TVD ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Ю.И. Димитриенко, М.Н. Коряков

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Схемы TVD в последнее время стали достаточно популярны при решении задач газовой динамики благодаря повышенной точности численного решения, получаемой с их помощью, особенно для задач с наличием сильных разрывов [1]. Целью настоящей работы было применение алгоритма построения схем TVD для системы уравнений газовой динамики в произвольных неортогональных системах координат, которые возникают при построении ленточно-адаптивных сеток [2].

Рассмотрим систему уравнений динамики идеального газа, которую в адаптивных в криволинейных координатах X^i можно представить следующим образом [2].

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}^i}{\partial X^i} = 0, \quad (1)$$

где обозначены координатные столбцы

$$\mathbf{U} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho Q_j^1 v^j \\ \dots \\ \rho Q_j^3 v^j \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}^i = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \rho v^i \\ Q_j^1 (\rho v^i v^j + p g^{ij}) \\ \dots \\ Q_j^3 (\rho v^i v^j + p \delta^{ij}) \\ v^i (\rho E + p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

здесь ρ – плотность газа, E – полная энергия газа: $E = C_v \cdot \theta + \frac{|v|^2}{2}$, C_v – теплоёмкость при постоянном объеме, θ – температура газа, $|v|^2 = v^i v_i$ – квадрат модуля скорости, p – давление: $p = \rho \frac{R}{\mu} \theta$, R – универсальная газовая постоянная, μ – молекулярная масса газа, $\mathbf{E}$ – метрический тензор, $\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$ –

набла-оператор в криволинейных координатах X^i , $\bar{v}^i$ - компоненты вектора скорости в декартовом базисе, $Q_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}$ - компоненты якобиевой матрицы преобразования декартовых координат в адаптивные, $g = \det g_{ij}$ - детерминант метрической матрицы $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = Q_i^k Q_j^l \delta_{kl}$.

Система (1) имеет дивергентный вид. Рассмотрим также систему, имеющую не дивергентный вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \hat{P}_j^i \frac{\partial \mathbf{V}'^j}{\partial X^i} = 0, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{U}' = \sqrt{g'} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^{i1} \\ \dots \\ \rho v^{i3} \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}'^i = \sqrt{g'} \begin{pmatrix} \rho v^{i1} \\ \rho v^{i1} v^{i1} + p g^{i1} \\ \dots \\ \rho v^{i1} v^{i3} + p g^{i3} \\ v^{i1} (\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а v^{i1} - компоненты в ортогональной криволинейной системе координат X^{i1} , $\hat{Q}_j^i = \frac{\partial X^{i1}}{\partial X^j}$ и $\hat{P}_j^i = \frac{\partial X^i}{\partial X^{i1}}$ - прямая и обратная якобиевы матрицы; $g' = \det g_{ij}'$, $g_{ij}' = Q_i^{k1} Q_j^{l1} \delta_{kl}$.

Рассмотрим способ получения TVD схемы 2-ого порядка аппроксимации, основанный на методе Хартена, который называется "методом модифицированного потока" и заключается в применении TVD схемы 1-ого порядка аппроксимации к соответствующим образом модифицированным потокам функций: $\tilde{f} = (f + \frac{1}{\lambda} g)$. Тогда конечно-разностные соотношения, аппроксимирующие уравнения Эйлера, можно представить в виде явной схемы

$$\mathbf{U}_k^{n+1} = \mathbf{U}_k^n - \lambda^1 (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n})_{FB} - \lambda^2 (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n})_{RL} - \lambda^3 (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n})_{UD}; \quad (5)$$

где $\mathbf{U}_k^n = \mathbf{U}(X_k, t^n)$ - значения функций в k -ом узле ленточной адаптивной сетки (нумеруются одним индексом) в момент времени t^n , $\lambda^i = \Delta t / (X_{k+} - X_k)$ — число Куранта, $\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{i,n}$ — столбцы численного потока в i -ом направлении, которые определяются по следующей формуле:

$$\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{i,n} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_k^{i,n} + \mathbf{V}_{k+1}^{i,n} + \frac{1}{\lambda^i} \mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n} \cdot \Phi_{k+1/2}^{i,n}). \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{V}_k^{i,n} = \mathbf{V}^i(X_k, t^n)$, $\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n} = (\mathbf{R}_{k+1}^{i,n} + \mathbf{R}_k^{i,n})/2$, $\mathbf{R}_k^{i,n} = \mathbf{R}^i(X_k, t^n)$, а $\mathbf{R}^i$ — матрица правых собственных векторов матрицы $\mathbf{G}^i = \partial \mathbf{V}^i / \partial \mathbf{U}$, которая имеет следующий вид

$$\mathbf{G}^i = \begin{bmatrix} 0 & P_1^i & P_2^i & P_3^i & 0 \\ -\bar{v}^i \bar{v}^1 + \frac{(\gamma-1)P_1^i |v|^2}{2} & \bar{v}^i - (\gamma-2)\bar{v}^1 P_1^i & P_2^i \bar{v}^1 - (\gamma-1)\bar{v}^2 P_1^i & P_3^i \bar{v}^1 - (\gamma-1)\bar{v}^3 P_1^i & (\gamma-1)P_1^i \\ -\bar{v}^i \bar{v}^2 + \frac{(\gamma-1)P_2^i |v|^2}{2} & P_1^i \bar{v}^2 - (\gamma-1)\bar{v}^1 P_2^i & \bar{v}^i - (\gamma-2)\bar{v}^2 P_2^i & P_3^i \bar{v}^2 - (\gamma-1)\bar{v}^3 P_2^i & (\gamma-1)P_2^i \\ -\bar{v}^i \bar{v}^3 + \frac{(\gamma-1)P_3^i |v|^2}{2} & P_1^i \bar{v}^3 - (\gamma-1)\bar{v}^1 P_3^i & P_2^i \bar{v}^3 - (\gamma-1)\bar{v}^2 P_3^i & \bar{v}^i - (\gamma-2)\bar{v}^3 P_3^i & (\gamma-1)P_3^i \\ \bar{v}^i \left(\frac{(\gamma-1)|v|^2}{2} - H \right) & P_1^i H - (\gamma-1)\bar{v}^i \bar{v}^1 & P_2^i H - (\gamma-1)\bar{v}^i \bar{v}^2 & P_3^i H - (\gamma-1)\bar{v}^i \bar{v}^3 & \gamma \bar{v}^i \end{bmatrix}$$

Введены обозначения: $H = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{|v|^2}{2}$ — интеграл Бернулли, a^2 — квадрат скорости звука. Матрица $\mathbf{R}^i$ правых собственных векторов имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{v}^1 - as_1 & \bar{v}^1 & s_2 & -s_3 & 0 & \bar{v}^1 + as_1 \\ \bar{v}^2 - as_2 & \bar{v}^2 & -s_1 & 0 & s_3 & \bar{v}^2 + as_2 \\ \bar{v}^3 - as_3 & \bar{v}^3 & 0 & s_1 & -s_2 & \bar{v}^3 + as_3 \\ H - a \frac{v^i}{g^{ii}} & \frac{|v|^2}{2} & \bar{v}^1 s_2 - \bar{v}^2 s_1 & \bar{v}^3 s_1 - \bar{v}^1 s_3 & \bar{v}^2 s_3 - \bar{v}^3 s_2 & H + a \frac{v^i}{\sqrt{g^{ii}}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

где $s_j = P_j^i / \sqrt{g^{ii}}$. Здесь указаны 6 столбцов, 3,4,5-ый, соответствующие собственному значению v^i , являются линейно зависимыми и при каждом значении $i=1,2,3$ один из этих столбцов обращается в ноль, он исключается из матрицы.

Столбец $\Phi_{k+1/2}^{i,n}$ численной диссипации имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1/2}^{i,n} &= (\phi_{j,k+1/2}^{i,n}, \dots, \phi_{5,k+1/2}^{i,n})^T, & \phi_{j,k+1/2}^{i,n} &= g_{j,k}^{i,n} + g_{j,k+1}^{i,n} - \psi(\lambda_{j,k+1/2}^{i,n} + \gamma_{j,k+1/2}^{i,n}) \alpha_{j,k+1/2}^{i,n}, \\ g_{j,k}^{i,n} &= s_{j,k+1/2}^{i,n} \max[0, \min(|\tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n}|, \tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n} s_{j,k+1/2}^{i,n})], & s_{j,k+1/2}^{i,n} &= \text{sign}(\tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n}), \\ \tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n} &= \frac{1}{2} [\psi(\lambda_{j,k+1/2}^{i,n}) - (\lambda_{j,k+1/2}^{i,n})^2] \alpha_{j,k+1/2}^{i,n}, & \gamma_{j,k+1/2}^{i,n} &= \begin{cases} (g_{j,k+1}^{i,n} - g_{j,k}^{i,n}) / \alpha_{j,k+1/2}^{i,n}, & \alpha_{j,k+1/2}^{i,n} \neq 0 \\ 0, & \alpha_{j,k+1/2}^{i,n} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Величины $a_{j,k}^{i,n} = a_j^i(X_k, t^n)$ - это значения собственных чисел a_j^i матриц $\mathbf{G}^i$, которые выражаются по формулам

$$a_1^i = v^i - a \sqrt{g^{ii}}; a_2^i = v^i; a_3^i = v^i; a_4^i = v^i; a_5^i = v^i + a \sqrt{g^{ii}} \quad (9)$$

Величины $\alpha_{j,k+1/2}^{i,n}$ представляющие перепады вектора газодинамических переменных $\mathbf{U}_k^n$ в характеристической форме, определяются из следующих соотношений

$$\alpha_{k+1/2}^{i,n} = (\alpha_{1,k+1/2}^{i,n}, \dots, \alpha_{5,k+1/2}^{i,n})^T = (\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n})^{-1} (\mathbf{U}_{k+1}^n - \mathbf{U}_k^n). \quad (10)$$

Здесь $(\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n})^{-1} = ((\mathbf{R}_{k+1}^{i,n})^{-1} + (\mathbf{R}_k^{i,n})^{-1})/2$, а $(\mathbf{R}_k^{i,n})^{-1} = (\mathbf{R}^i)^{-1}(X_k, t^n)$ — матрицы левых собственных векторов матрицы $\mathbf{G}^i$, которые имеют следующий вид

$$(\mathbf{R}_k^1)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)|v|^2 + a\bar{v}^i}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^1 - ak_1}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 - ak_2}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 - ak_3}{2a^2} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \\ \frac{2a^2 - (\gamma-1)|v|^2}{4a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^1}{a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^2}{a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^3}{a^2} & \frac{\gamma-1}{a^2} \\ \frac{\bar{v}^2 - v^i k_2}{k_1} & k_2 & \frac{k_2^2 - 1}{k_1} & \frac{k_2 k_3}{k_1} & 0 \\ \frac{v^i k_3 - \bar{v}^3}{k_1} & -k_3 & \frac{k_2 k_3}{k_1} & \frac{1 - k_3^2}{k_1} & 0 \\ \frac{(\gamma-1)|v|^2 - a\bar{v}^i}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^1 + ak_1}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 + ak_2}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 + ak_3}{2a^2} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$(\mathbf{R}_k^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)|v|^2 + a\bar{v}^i}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^1 - ak_1}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 - ak_2}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 - ak_3}{2a^2} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \\ \frac{2a^2 - (\gamma-1)|v|^2}{4a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^1}{a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^2}{a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^3}{a^2} & \frac{\gamma-1}{a^2} \\ \frac{v^i k_1 - \bar{v}^1}{k_2} & \frac{1 - k_1^2}{k_2} & -k_1 & \frac{k_1 k_3}{k_2} & 0 \\ \frac{\bar{v}^3 - v^i k_3}{k_2} & \frac{k_1 k_3}{k_2} & k_3 & \frac{k_3^2 - 1}{k_1} & 0 \\ \frac{(\gamma-1)|v|^2 - a\bar{v}^i}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^1 + ak_1}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 + ak_2}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 + ak_3}{2a^2} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$(\mathbf{R}_k^3)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)|v|^2 + a\bar{v}^i}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^1 - ak_1}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 - ak_2}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 - ak_3}{2a^2} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \\ \frac{2a^2 - (\gamma-1)|v|^2}{4a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^1}{a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^2}{a^2} & \frac{(\gamma-1)\bar{v}^3}{a^2} & \frac{\gamma-1}{a^2} \\ \frac{\bar{v}^1 - v^i k_1}{k_3} & \frac{k_1^2 - 1}{k_3} & \frac{k_1 k_2}{k_3} & -k_1 & 0 \\ \frac{v^i k_2 - \bar{v}^3}{k_3} & \frac{k_1 k_2}{k_3} & \frac{1 - k_2^2}{k_1} & -k_2 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)|v|^2 - a\bar{v}^i}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^1 + ak_1}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 + ak_2}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 + ak_3}{2a^2} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Функция численной вязкости ψ определяется по формуле

$$\psi(z) = \begin{cases} |z|, & z > \varepsilon \\ (z^2 + \varepsilon^2)/2\varepsilon, & z < \varepsilon \end{cases} \quad (14)$$

здесь ε — параметр диссипации. При $\varepsilon=0$ диссипация будет наименьшей, чем больше ε , тем более диссипативной является разностная схема.

Для недивергентной системы (3) конечно-разностные соотношения схемы TVD 2-го порядка, примененной для ленточно-адаптивной сетки, выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k^{m+1} = & \mathbf{U}_k^m - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}}{X_{F_k}^{1,n} - X_k^{1,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}}{X_{R_k}^{2,n} - X_k^{2,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}}{X_{U_k}^{3,n} - X_k^{3,n}} \right) - \\ & - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}}{X_{F_k}^{1,n} - X_k^{1,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}}{X_{R_k}^{2,n} - X_k^{2,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}}{X_{U_k}^{3,n} - X_k^{3,n}} \right) - \\ & - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}}{X_{F_k}^{1,n} - X_k^{1,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}}{X_{R_k}^{2,n} - X_k^{2,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}}{X_{U_k}^{3,n} - X_k^{3,n}} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

где численные потоки представляются в виде

$$\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{i,n} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_k^{j,n} + \mathbf{V}_{k+1}^{j,n}) P_{j,k}^{i,n} + \frac{1}{2\lambda_j} \mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n} \cdot \Phi_{k+1/2}^{i,n} \quad (16)$$

$P_{j,k}^{i,n} = P_j^i(X_k, t^n)$ — компоненты обратной матрицы Якоби перехода из декартовых координат к адаптивным. Матрица $\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n}$ правых собственных векторов получается из (7) заменой P^j на δ_j^i , $\bar{v}^i$ на v^i , g^{ii} на 1 для всех i .

Столбец $\Phi_{k+1/2}^{i,n}$ определяется по формулам (8)-(9). В которых следует осуществить замену $a_{j,k+1/2}^{i,n} \rightarrow \tilde{a}_{j,k+1/2}^{i,n}$, где $\tilde{a}_{j,k+1/2}^{i,n} = \bar{a}_{j,k+1/2}^{i,n} P_{i,k+1/2}^{j,n}$, а $\bar{a}_{j,k}^{i,n} = \bar{a}_j^i(X_k, t^n)$ — собственные значения матрицы G^i , в декартовой системы координат имеющие вид

$$a_1^i = \bar{v}^i - a; a_2^i = \bar{v}^i; a_3^i = \bar{v}^i; a_4^i = \bar{v}^i; a_5^i = \bar{v}^i + a \quad (17)$$

Матрицы левых собственных векторов $(\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n})^{-1}$ также получаются из (11)-(13) заменой P_j^i на δ_j^i , v^i на $\bar{v}^i$, $g^{ii} = 1$ для всех i .

Была проведена серия тестов для апробации разработанного метода TVD.

1) Задача о распаде произвольного разрыва, в которой в качестве начальных данных были заданы скачки безразмерной плотности и давления: $x < 0.5: p = 1, \rho = 1$; $x > 0.5: p = 0.1, \rho = 0.125$. На рис.1 показаны распределения плотности, давления и скорости газа в момент времени (безразмерный) $t = 0.25$. Решение по методу TVD имеет значительно более высокую точность решения, том числе для скачка плотности и давления на ударных волнах и на контактном разрыве. «Размазывание» решения на скачках для метода TVD происходит на 1-2 разностных ячейках, а для метода Мак-Кормака — на 3-4-х.

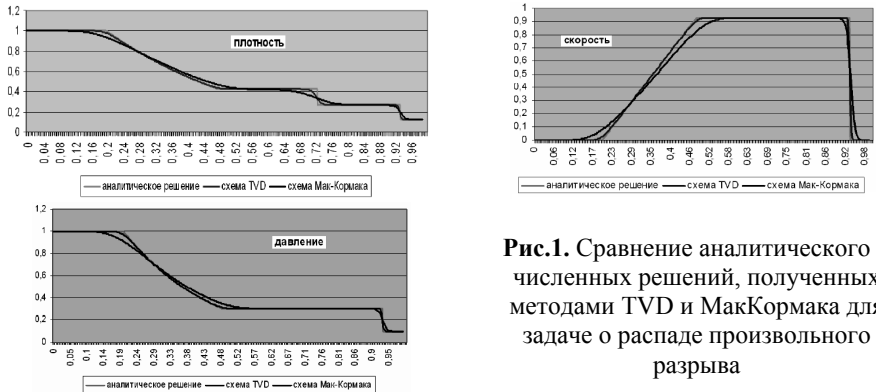


Рис.1. Сравнение аналитического и численных решений, полученных методами TVD и МакКормака для задаче о распаде произвольного разрыва

2) Течение газа в канале со ступенькой. Сверхзвуковой поток идеального газа ($M=3$, $\gamma=7/5$) затекает в прямоугольный канал размерами 1×3 , на расстоянии 0.6 от левой грани которого располагается ступенька высотой 0.2. Начальные условия: $p=0.05, \rho=5, v_x=v_y=0$, граничные условия на границе входа потока: $p=1/k, \rho=1$. На рис.2 показаны результаты решения этой задачи методом МакКормака и по разработанной схеме TVD со значениями параметра диссипации ϵ , а также численные результаты, полученные в ИПМ им.М.В.Келдыша. Решение по методу TVD при $\epsilon=0.01$ обладает более высокой «четкостью» линий уровня, чем по схеме МакКормака – размазывание ударных волн происходит на 2 ячейках. в то время как для метода МакКормака – на 3-4 ячейках. Для схемы TVD с $\epsilon=0.02$ размазывание происходит на 3 ячейках.

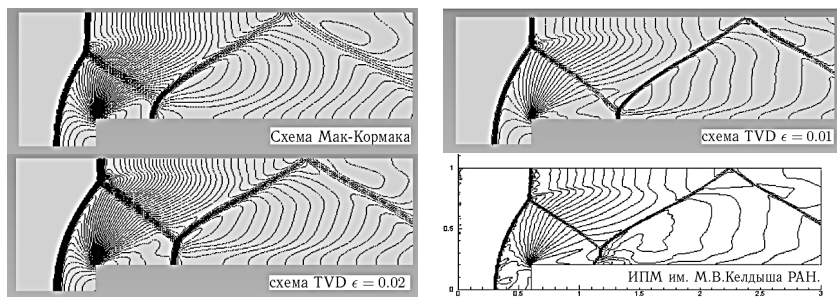


Рис.2. Численное решение (линии уровня для безразмерной плотности), полученное методами МакКормака, TVD и в ИПМ им.М.В.Келдыша для задачи об обтекании сверхзвуковым потоком газа ступеньки в канале.

3) Обтекание клина. Клин размером 3.2×2.2 с углом 30° , обтекается сверхзвуковым потоком. Начальные условия: $p=1., \rho=1.4, v_x=v_y=0$, граничные условия $p=117, \rho=8, v_x=8.25, v_y=0$. На рис. 3 показаны линии уровня плотности в момент времени $t=0,2$ с. Как и в случае задачи о ступеньке, метод TVD обеспечивает более высокую четкость картины течения с меньшим размазыванием решения на ударных волнах.

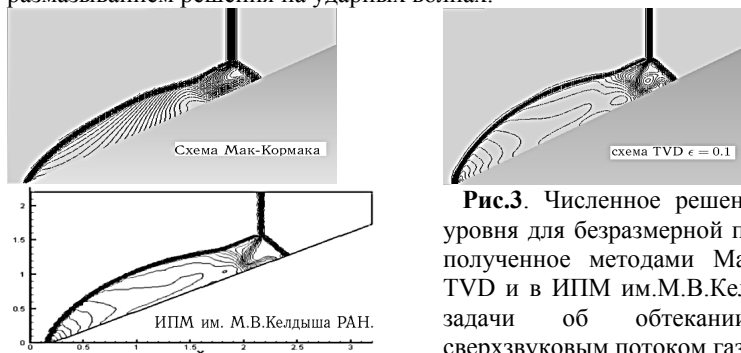


Рис.3. Численное решение (линии уровня для безразмерной плотности), полученное методами МакКормака, TVD и в ИПМ им.М.В.Келдыша для задачи об обтекании клина сверхзвуковым потоком газа

Список литературы

1. *Димитриенко Ю.И., Захаров А.А.* Метод ленточных адаптивных сеток в газовой динамике.-М.:Изд-во НТЦ «Университетский».-2008.-180 с.
2. *Гильманов А.Н.* Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики.- М.:Наука. Физматлит.-2000.-248 С.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОГО КОНТРОЛЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Ю.И. Димитриенко, И.К. Краснов, А.А. Николаев
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Работа посвящена разработке численного метода решения геометрически-обратных задач теплового контроля (задач восстановления геометрии дефектов в конструкциях по экспериментально измеренным тепловым полям на поверхностях) и методики прогнозирования остаточного ресурса неметаллических конструкций с дефектами.

Предложенный метод решения геометрически-обратных задач теплового контроля (ГОЗТК) состоит из 3-х основных этапов: 1) этапа предварительной обработки результатов измерений на основе методов контурного анализа, 2) этапа распознавания трехмерных категорий дефектов в конструкциях и 3) этапа восстановления геометрических параметров формы дефектов (глубины залегания, размеров в плане, толщины раскрытия и др.).

На 1-м этапе определяются проекции дефектов на внешнюю нагреваемую поверхность конструкции. Для этой цели используются алгоритмы выделения контуров (алгоритм «жука») на экспериментальной термограмме, полученной для конкретного исследуемого элемента конструкции с дефектом. Далее применяются методы контурного анализа для подавления шумовых помех, полученных при обработке экспериментальных термограмм, при этом решается задача распознавания, заключающаяся в обоснованном отнесении зашумленного контура к одному из имеющихся классов. Для принятия решения формируется безусловное отношение правдоподобия и осуществляется сравнение его с пороговым значением.

Для 2-го и 3-го этапов применяется метод решения геометрически-обратной трехмерной задачи теплопроводности в телах с дефектами, которая формулируется следующим образом: пусть имеется многосвязная область $V \subset R^3$, ограниченная внешней поверхностью Σ_0 и внутренними поверхностями $\Sigma_k, k=1...K$ - число и вид которых неизвестны. На части внешней поверхности Σ_{01} задан тепловой поток $q_e(x, t)$, а на части Σ_{0e} внешней поверхности известно температурное поле $\theta_{\Sigma_e}(x)$ в момент времени t_1 , ставится задача: найти такие $\Sigma_k, k=1...K$, из некоторого заданного класса поверхностей A , которые обеспечивают минимум функционалу отклонения ошибки

$$H = \int_{\Sigma_e} H_D(\mathbf{x}) d\Sigma \quad \min, \quad (1)$$

$$H_D(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{\theta(\mathbf{x}|_{\Sigma_{0e}}, t_1)}{\theta_{\Sigma_e}(\mathbf{x})} \right)^2, \quad (2)$$

где $\theta(\mathbf{x}, t)$ - температурное поле, полученное путем численного решения нестационарной задачи теплопроводности

$$\begin{cases} \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \theta), & \mathbf{x} \in V, t \in (t_0, t_1), \\ \theta|_{t=0} = \theta_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in V \cup \Sigma, \quad -\mathbf{n} \cdot \lambda \cdot \nabla \theta|_{\Sigma_{01}} = q_e(\mathbf{x}, t), \quad t \geq t_0, \\ -\mathbf{n} \cdot \lambda \cdot \nabla \theta|_{\Sigma_{02}} = \alpha^T(\theta_e - \theta|_{\Sigma_2}) - \sigma_{SB} \varepsilon_c \theta^4|_{\Sigma_2}, & t \geq t_0, \\ -\mathbf{n} \cdot \lambda \cdot \nabla \theta|_{\Sigma_k} = -\sigma_{SB}(\varepsilon_c \theta^4|_{\Sigma_k} - \tilde{\varepsilon}_c \theta^4|_{\tilde{\Sigma}_k}), & t \geq t_0, k = 1 \dots K \end{cases} \quad (3)$$

где ρ - плотность; c_v - теплоемкость; λ - тензор теплопроводности; θ_0 - начальная температура; q_e - заданная плотность теплового потока; α^T - коэффициент теплоотдачи; θ_e - температура внешней среды, σ_{SB} - постоянная Стефана-Больцмана, $\varepsilon_c, \tilde{\varepsilon}_c$ - интегральные коэффициенты излучения поверхностей тела, $\theta|_{\Sigma_k}$ - температура в точках поверхности Σ_k , не совпадающих с рассматриваемой точкой, выполняются следующие условия: $\Sigma_0 = \Sigma_{01} + \Sigma_{02}$, $\Sigma_{01} \subset \Sigma_{0e} \subset \Sigma_0$.

В качестве классов A форм дефектов Σ_k вводятся геометрические объекты в виде совокупности криволинейных цилиндров: 1) класс A_{D1} - нормальное сечение цилиндров в виде вытянутых эллипсов; 2) класс A_{D2} с сечением в виде вытянутых «лодочек»; 3) класс A_{D3} - в виде вытянутых параллелепипедов; 4) класс A_{D4} - в виде эллипсов, с близкими значениями полуосей; 5) класс A_{D5} - в виде широких параллелепипедов.

В каждом классе задается A форма дефекта Σ_k характеризуется набором управляющих параметров $(a_{1k} \dots a_{mk}) \in \Omega \subset R^m$, так дефект из класса A_{D1} характеризуется тремя параметрами: a_{1k}, a_{2k} - значениями полуосей эллипса и глубиной залегания a_{3k} по отношению к нагреваемой поверхности. В этом случае функционал H (1) зависит от 3-х управляющих параметров a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} .

Для решения задачи оптимизации (1)...(3) используется метод покоординатного спуска в многомерном пространстве R^m управляющих параметров, при котором на каждом шаге итерации решается прямая задача теплопроводности (2) с заданными значениями a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} . Для численного решения прямой задачи используется метод конечного элемента, с тетраэдральным десятиузловым конечным элементом.

В качестве тестирования разработанного метода решения ГОЗТК была рассмотрена задача о тепловом контроле стеклопластиковой пластины с круговым дефектом. Характеристики пластины были выбраны следующими: $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0.4 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\lambda_{33} = 0.35 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\rho = 1590 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 1,03 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}$. Эксперимент проводился при температура окружающей среды $\theta_e = 294.5 \text{ К}$; коэффициент конвективного теплообмена $\alpha^r = 125.6 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, температура $\theta_e = 294.5 \text{ К}$, нагрев поверхности производился строительным феном DWT с тепловым потоком в $q_e = 794 \text{ Вт/м}^2$ с расстояния 0.05 м в течение 50 с . Далее производился съем термографического изображения портативным компьютерным термографом «Иртис-200». На рис.1 показано температурное поле, полученное с помощью термографа, а на рис.2 – результаты работы этапа 1 разработанной методики по определению поверхностных проекций контуров дефектов.

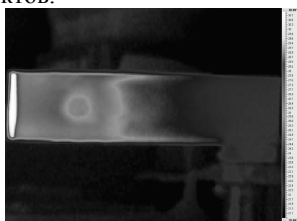


Рис.1. Температурное поле поверхности образца с дефектами, полученное с помощью термографа

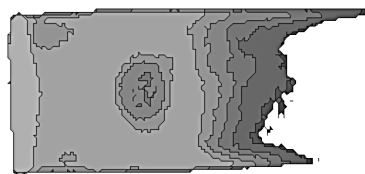
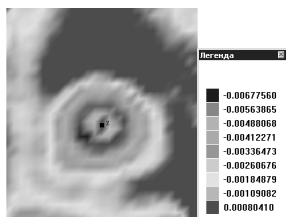


Рис.2. Этап 1 работы методики: система контуров для исследуемой области с дефектом

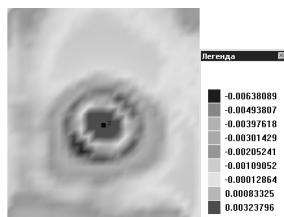
Общее число КЭ в сетке — 78000. В табл.1 представлены промежуточные результаты работы этапа 2 и 3 методики: показаны значения параметров a_3, a_1 (глубины залегания и радиуса кругового дефекта), достигнутые на различных итерациях метода покоординатного спуска, а также значения относительной (процентной) невязки H (1). На рис. 3 представлены поля относительной невязки H_D (2) для некоторых решений возможных дефектов с толщиной 0.5 мм .

Таблица 1
Таблица решений задачи оптимизации (1)-(3) для тестового примера с круговым дефектом, в клетках приведены значения функционала невязки H (1).

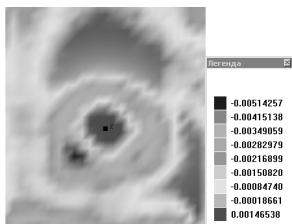
Глубина залегания, мм a_1	Радиус возможного дефекта, a_3 , мм					
	4.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5
0.5	0.002266	0.002119	0.002010			
1	0.002252	0.001993	0.001841	0.001710		
1.5	0.00225	0.001939	0.001762	0.001585	0.001622	
2		0.001921	0.001731	0.001522	0.001511	0.001732
2.5			0.001729	0.001499	0.001433	0.001614
3				0.001511	0.001451	0.001535



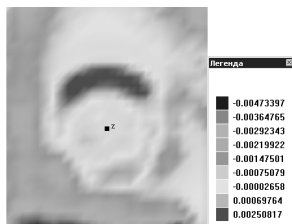
Поле H_D для столбца 0, строки 0 матрицы табл. 1



Поле H_D для столбца 1, строки 0 матрицы табл. 1



Поле H_D для столбца 2, строки 2 матрицы табл. 1



Поле H_D для столбца 5, строки 5 матрицы табл. 1

Рис. 3. Поля параметра H_D , полученные путем численного решения задачи (3) для поля возможных дефектов толщиной 0.5 мм

Для прогнозирования остаточного ресурса неметаллических конструкций с дефектами была разработана 2-х этапная методика, на первом этапе которой численно решается квазистатическая трехмерная задача теории упругости

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, & 2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{S_\sigma} = \mathbf{s}, & \mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; ${}^4\mathbf{C}$ – тензор модулей упругости; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; ∇ – набла-оператор; $\mathbf{n}$ – вектор нормали; $\mathbf{s}$ – вектор нагрузок; $\mathbf{u}_0$ – заданный вектор перемещений, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{u}_0$ – зависят от времени t .

Для численного решения задачи (4) был применен метод конечного элемента, также с тетраэдральным десятиузловым конечным элементом.

На 2-м этапе методики осуществляется вычисление параметра повреждаемости конструкции с дефектом под действием переменных нагрузок и перемещений $\mathbf{s}(t)$ и $\mathbf{u}_0(t)$. Для композиционных материалов для этой цели вначале вычисляются микронапряжения в компонентах композита: $\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = {}^4\mathbf{B}_{(r)} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, где ${}^4\mathbf{B}_{(r)}$ – тензоры концентрации напряжений в компонентах композита (матрице и волокнах), а затем вычисляется параметр повреждаемости согласно так называемому «химическому» критерию длительной прочности» [1]. Для изотропных сред при циклическом

моногармоническом нагружении вида $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^0 \frac{1}{1+|k|} (k + \sin \omega t)$, где $\mathbf{s}^0$ – амплитуда колебаний; k – параметр ассиметрии цикла; $\omega \geq 0$ – частота нагружения, «химический» критерий имеет следующий вид

$$z(t) = B f_0 \sigma^0 + \frac{1}{3} B_1 (\sigma^0)^2 + B_2 (\sigma_u^0)^2 + (\sigma_{u+}^0)^2 (N_1 t^{1-\alpha} - N_2 t^{2-2\beta}) \quad (5)$$

где $N_1 = f_1 K_0 / (1 - \alpha)$; $N_2 = f_2 \Gamma_0^2 / (1 - \beta)^2$; $f_0 = (k + 1) / (|k| + 1)$; $f_1 = (k^2 + 0.5) / (|k| + 1)^2$; $f_2 = k^2 / (|k| + 1)^2$; $(\sigma_{u+}^0)^2 = 0.5((\sigma_u^0)^2 - \xi(\sigma_-^0)^2) + (\sigma_u^0)^2 - \xi(\sigma_-^0)^2$; $\sigma_{\pm}^0 = 0.5(|\sigma_1^0| \pm \sigma_1^0)$; а σ_1^0 и σ_u^0 – первый и второй инварианты тензора амплитуд напряжений σ^0 – в компонентах композита $(\sigma_{(r)}) = \sigma_{(r)}^0 \frac{1}{1+|k|} (k + \sin \omega t)$, α , β , ξ , K_0 , Γ_0 – параметры долговечности компонентов композита, получаемые из 2-х экспериментальных кривых усталостной прочности.

Разрушение элемента конструкции в момент времени t_* происходит при выполнении условия $z(t_*) = 1$.

На рис.4 показаны вычисленные по указанной методике поля амплитуд напряжений в плоской композитной с круговым дефектом, который был обнаружен описанным выше методом ГОЗТК, один торец пластины был жестко закреплён, а на втором была приложена циклическая нагрузка с амплитудой s_1^0 .

На рис.5 показаны графики изменения параметра повреждаемости (5) в зависимости от времени при различных значениях амплитуды нагрузки s_1^0 . Были приняты следующие значения констант: пределы статической прочности матрицы на сжатие $\sigma_c = 67$ МПа, растяжение $\sigma_r = 85$ МПа, сдвиг $\sigma_s = 30$ МПа, параметр ассиметрии цикла $k=10$, константы долговечности $\alpha = 0.71$, $\beta = 0.9$, $K_0/t_0^{1-\alpha} = 254.8$, $\Gamma_0^2/t_0^{1-\beta} = 479.5$, $\xi = 0.95$.

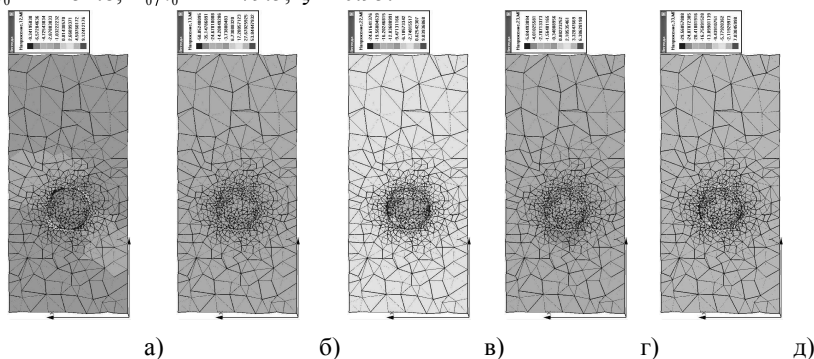


Рис. 4. Поля напряжений в стеклопластиковой пластине с дефектом:

а) σ_{22}^0 , б) σ_{33}^0 , в) σ_{12}^0 , г) σ_{13}^0 д) σ_{13}^0 .

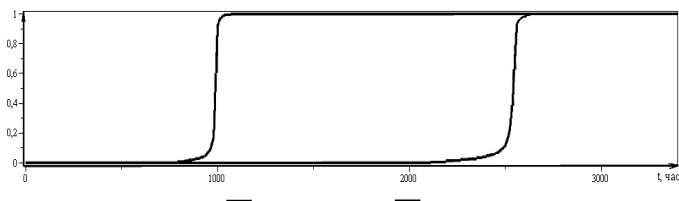


Рис.5. Накопление повреждаемости $z(t)$ в композитной пластине с круговым дефектом при различных значениях амплитуды нагрузки s_1^0 .

Выводы: в работе разработан новый подход к диагностике состояния, и прогнозированию долговечности элементов неметаллических конструкций, основанный на комплексном применении вычислительных методов решения геометрически-обратных задач теплового контроля и методов расчета напряжений и повреждаемости композитных конструкций с дефектами.

Список литературы

1. *Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П.* Прогнозирование долговечности полимерных элементов конструкций с помощью «химического» критерия длительной прочности // Вопросы обороны техники. – 2002. – №1.
2. *Краснов И.К., Николаев А.А.* Метод распознавания трехмерных дефектов типа трещин в конструкциях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2008. – №3. – С. 104–111.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ГАЗОДИНАМИКИ

Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В работе изложены результаты разработки программного комплекса «Сигма», разработанного на кафедре ФН-11, и предназначенного для моделирования нестационарных газовых потоков в областях сложной формы с криволинейными границами. Программный комплекс имеет структуру, подобную известному коммерческому программному пакету CFX, и общим системам обеспечения газодинамических расчетов [1–6]: оно позволяет проводить моделирование двумерных, осесимметричных и трехмерных течений идеального и вязкого газа в декартовых и цилиндрических системах координат.

Программный комплекс состоит из модуля трехмерного геометрического моделирования области, обтекаемой газовым потоком; модуля задания свойств, параметров и начальных данных; генератора адаптивной конечно-разностной сетки (препроцессора), расчетного модуля (процессора) и визуализатора

(постпроцессора). Также имеется поддержка интеграции со стандартными программами визуализации расчетов и постпроцессорной обработки данных типа GMSH (www.geuz.org/gmsh/).

Каждый модуль является независимым программным продуктом, реализованным с помощью объектно-ориентированного подхода, и поддерживает возможность создания расширений. Обмен информацией между модулями осуществляется при помощи файлов. Блок генерации сеток и расчетный модуль могут выполняться в параллельном режиме на многоядерном компьютере с общей памятью.

Модуль препроцессора имеет графический интерфейс, позволяющий визуально создавать геометрические образы, выделять границы и области для последующего задания на них граничных и начальных условий, запускать процесс генерации сетки. Графическая среда позволяет сначала создавать заготовку исходной области из примитивов, а затем модифицировать ее, приближая к форме реальной поверхности расчетной области (рис. 1). Примитивы являются объемными геометрическими фигурами, ограниченными шестью поверхностями — гранями. Реализованы следующие типы примитивов: прямоугольный параллелепипед, сектор цилиндра и цилиндрический примитив в виде О-сетки (см. рис. 2б). Форма примитивов определяется опорными точками бисплайнов, образующих грани примитивов. Модификация заготовки происходит с помощью перемещения опорных точек (рис. 1). Перемещение осуществляется либо мышью на экране дисплея (для приближенного задания формы тела), либо с помощью непосредственного ввода новых координат опорных точек.

С каждым примитивом связан набор характеристик: тип начального условия в области, охватываемой примитивом; типы граничных условий на его гранях; габариты примитива в адаптивных (вычислительных) и физических координатах. Введенную геометрию области можно сохранять в файл.

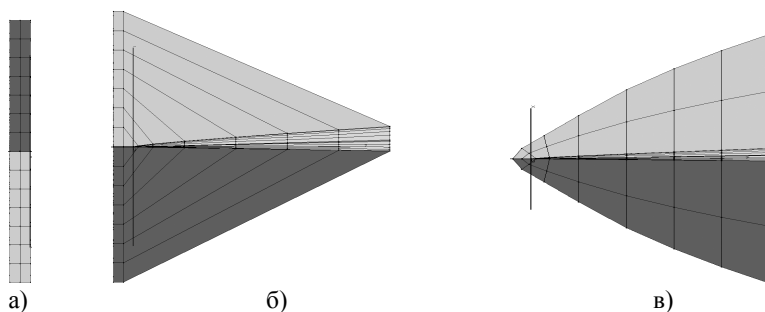


Рис.1. Процесс создания геометрии расчетной области из примитивов.

На основании полученной геометрии примитивов и определения их характеристик, а также на основе введенных количеств разбиений по трем координатным направлениям, осуществляется генерация адаптивной сетки

(рис. 2), имеющей ленточную структуру [4]. Имеется возможность сгущения сетки к заданным границам расчетной области (см. рис. 2а). Поддерживаются три функции, управляющие сгущением.

Основой вычислительного алгоритма расчетного модуля являются модифицированные конечноразностные схемы типа Мак–Кормака и TVD. Перед запуском расчёта производится считывание файла сетки, связывание начальных и граничных значений газодинамических параметров в узлах сетки с определенными типами начальных и граничных условий в узле; вводится необходимая информация для проведения расчетов, относящаяся к физической постановке задачи, используемому вычислительному алгоритму. Далее, методом установления, проводится численный расчет. Кроме того, имеется возможность вести расчет до определенного момента времени. Во время работы расчетный модуль выдает различную информацию о ходе расчёта, а также с определённой периодичностью выполняет сохранение результатов. Полученные результаты применяются при построении различных зависимостей, а также они могут использоваться как начальные условия для других расчетов. В этом случае большинство физических параметров может быть переопределено, что дает существенную гибкость при решении задач.

Математическая модель в расчетном модуле имеет переменную структуру, так что части уравнений, описывающие различные физические эффекты, вызываются только тогда, когда эти эффекты включены в решаемую задачу. Расчетный модуль имеет возможность полного управления счетом [2].

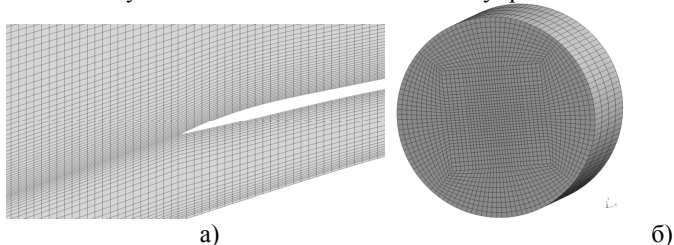


Рис.2. Примеры сгенерированных регулярных адаптивных сеток.

Вывод результатов в расчетном модуле может производиться для разных типов областей:

- 1) вывод результатов целиком для всей трехмерной геометрии расчетной области. В этом случае формируется файл с граничной поверхностной сеткой расчетной области и значениями в узлах этой сетки;

- 2) вывод результатов в различных сечениях расчетной области. Поддерживаются сечения, совпадающие с координатными плоскостями сгенерированной регулярной разностной сетки. Задание координатной плоскости производится при помощи фиксации одной адаптивной координаты в массиве узлов сетки. Выходной файл также представляет собой сеточную поверхность с полученными данными на ней;

3) вывод результатов вдоль определенных линий, проходящих через расчетную область. Линия должна являться координатной линией в адаптивной системе координат и задаваться фиксацией двух адаптивных координат в массиве узлов сетки. Выходной файл представляет собой текстовый файл с информацией о декартовых координатах узлов и значениях рассчитанных физических параметров в них;

4) вывод результатов в определенном узле сетки. Вывод результатов производится на каждой итерации, то есть для заданной точки можно полностью проследить динамику процесса установления физических параметров. Узел задается значениями своих адаптивных координат.

На рис. 3–6 представлены установившиеся распределения параметров газового потока в канале сверхзвукового воздухозаборника, полученные с помощью программного комплекса «Сигма». Предполагалось, что центральное тело воздухозаборника закреплено с помощью трех пилонов, отстоящих равномерно друг от друга. В результате моделирования получено, что при обтекании пилонов образовывались локальные участки повышенных значений плотности и давления (рис. 3) во всей области сужения канала; пилоны затормаживали осевое течение (рис. 4), образовывалось небольшое угловое течение (рис. 5). В непосредственной близости у границ пилонов резко возрастала температура (рис. 6).

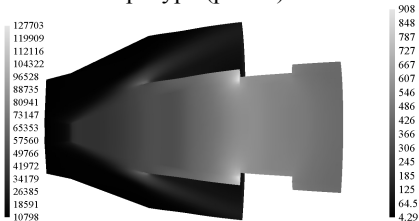


Рис.3. Давление [Па]

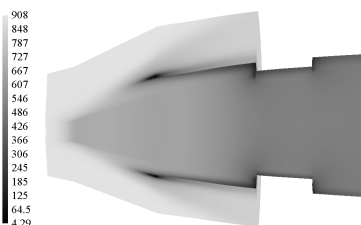


Рис.4. Осевая скорость [м/с]

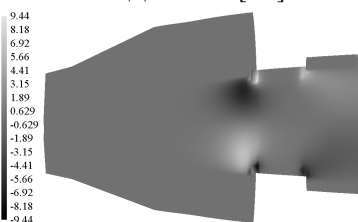


Рис.5. Угловая скорость [м/с]

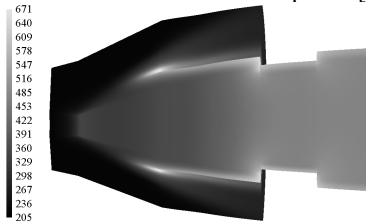


Рис.6. Температура [K]

Выводы: разработанный программный комплекс «Сигма» позволяет осуществлять в полуавтоматизированном режиме полный цикл работ по численному моделированию нестационарных двумерных, осесимметричных и трехмерных течений идеального и вязкого газа в декартовых и цилиндрических системах координат в областях сложной формы с криволинейными границами.

Список литературы

1. *Б.Н. Четверушкин, Е.В. Шильников.* Вычислительный и программный инструментарий для моделирования трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2008. – Т. 48, №. 2. - С. 309-320.
2. *И.Э. Иванов, И.А. Крюков, И.В. Терехов.* Объектно-ориентированная программная система подготовки данных и визуализации результатов газодинамических расчетов // Математическое моделирование.- 2001. - Т. 13, №. 7. - С. 110-115.
3. *И.Э. Иванов, И.А. Крюков, И.В. Терехов.* Особенности построения программной системы обеспечения газодинамических расчетов // Математическое моделирование.- 2002. - Т. 14, №. 8. - С. 28-30.
4. *Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров.* Метод ленточных адаптивных сеток в газовой динамике. -М.: Изд-во НТЦ «Университетский», 2008. -175 с.
5. *Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров.* Автоматизированная система для моделирования газовых потоков методом ленточных адаптивных сеток // Информационные технологии. - 2009. №. 6. - С. 12-16.
6. *С.Н. Ануфриев, А.Ю. Дзаганя, А.А.Захаров.* Применение технологий Microsoft для численного моделирования многомерных нестационарных газодинамических процессов. // Труды Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Москва, 2-3 марта 2006 г. - С. 50-52.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОРИСТЫХ СТРУКТУРАХ

Ю.И. Димитриенко, А.И.Левина

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В работах [1-3] был предложен метод асимптотического осреднения для исследования процессов переноса в периодических пористых средах. Целью настоящей работы является разработка конечно-элементного метода решения локальных задач на ячейке периодичности, которые возникают в этом методе, а также исследование с его помощью особенностей локальных процессов переноса в пористых средах, изучение погрешностей численного решения, вызванных особенностями самого метода конечных элементов.

Локальная задача переноса формулируется для ячейки периодичности пористой структуры и в вариационной постановке состоит из системы уравнений энергии и уравнения несжимаемости:

$$\int_{V_g} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{D} dV_g = \int_{\Sigma_g} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{W} dV_g - \int_{V_g} f \mathbf{e}_z \cdot \delta \mathbf{W} dV_g, \quad \int_{V_g} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{W} \delta p dV_g = 0, \quad (1)$$

здесь $\mathbf{W}$ - вектор скорости газа в поре, тензор напряжений $\mathbf{T}$, для которого имеют место соотношения Навье (линейно-вязкий газ): $\mathbf{T} = -\tilde{p}\mathbf{E} + \mu\mathbf{D}$, где $2\mathbf{D} = (\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{W}} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{W}}^T)$ – тензор скоростей деформаций, $\nabla_{\xi} f = \mathbf{r}^i \partial f / \partial X^i = \mathbf{e}^i \partial f / \partial \xi^i$ – набла-оператор дифференцирования по локальным координатам, $\tilde{p}$ – пульсация давления в поре (для истинного давления p газа имеет место следующее асимптотическое соотношение: $p = p_0 + \kappa \tilde{p}$, где $\kappa = l/L$ – малый параметр, p_0 – среднее давление в поре, l, L – характерные размеры поры и всей пористой структуры), μ – коэффициент вязкости, $\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ – вектор усилий на поверхности поры, $\mathbf{e}^i$ – декартов базис ($\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_z$ – базисный вектор по направлению канала поры), $\mathbf{r}^i$ – локальный базис цилиндрической системы координат X^i , $f = \partial p_0 / \partial x^3$ – массовая сила (полагается заданной), являющаяся источником движения газа в поре, x^3 – медленная координата. Скорость $\mathbf{W}$ удовлетворяет граничным условиям непроницаемости на твердой поверхности поры и условиям симметрии течения на границах входа-выхода канала поры. Для одноканальной пористой структуры рассматривается только двумерный осесимметричный вариант решения задачи.

Для решения системы вариационных уравнений (1) был применен метод конечных элементов с шестиузловым треугольным конечным элементом. Этот элемент имеет 15 степеней свободы: по две компоненты вектора скорости W_r, W_z в каждом узле и по одному значению давления p в каждой вершине треугольника. Аппроксимация в каждом конечном элементе (КЭ) по скоростям была квадратичной, а по давлению – линейной: $\{W\} = [\Phi] \{q\}$, $\tilde{p} = \{\Phi_p\}^T \{y\}$, где $\{q\}$ – координатный столбец скоростей в узлах, $\{y\}$ – координатный столбец давлений в вершинах КЭ, а $[\Phi]$ и $\{\Phi_p\}$ – матрица и вектор функций формы. Координатный столбец напряжений $\{T\}$ связан с координатным столбцом скоростей деформаций линейным соотношением: $\{T\} = -[\Phi_p] \{y\} + \mu \{D\}$, где $\{D\} = [B] \{q\}$. Разрешающая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет вид:

$$[K] \{q\} - [B_p] \{y\} = \{f\}, \quad [B_p]^T \{q\} = 0, \quad (2)$$

где обозначены локальные матрицы жесткости и векторы правой части:

$$\begin{aligned} [K] &= \mu \int_{V_g} [B]^T [B] dV_g \\ [B_p] &= \int_{V_g} [B]^T [\Phi_p] dV_g \\ f &= \int_{\Sigma_g} [\Phi]^T \{S\} d\Sigma + \int_{V_g} [\Phi]^T \{I_z\} dV_g \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку матрица СЛАУ не является симметричной, то для ее решения применялся прямой метод Гаусса и итерационный метод QMR.

При численном моделировании варьировались следующие параметры: тип КЭ сетки: регулярный и нерегулярный; общее число КЭ; неравномерность

распределения КЭ; радиус входного канала поры; форма поры. Было установлено, что при измельчении регулярной сетки КЭ удается достичь практически полного устранения вычислительной погрешности, если использовать неравномерную КЭ сетку, у которой происходит сгущение узлов в зоне максимальных значений решения вблизи оси симметрии канала. При использовании метода QMR для адаптивной сетки погрешность не превышала 10%. Численное моделирование показало, что в порах формируется застойная зона (рис.1), где скорость практически нулевая, а основное движение газа происходит по сквозному каналу, причем ее значение практически не зависит от геометрической формы застойной зоны и определяется только диаметром сквозного канала поры.

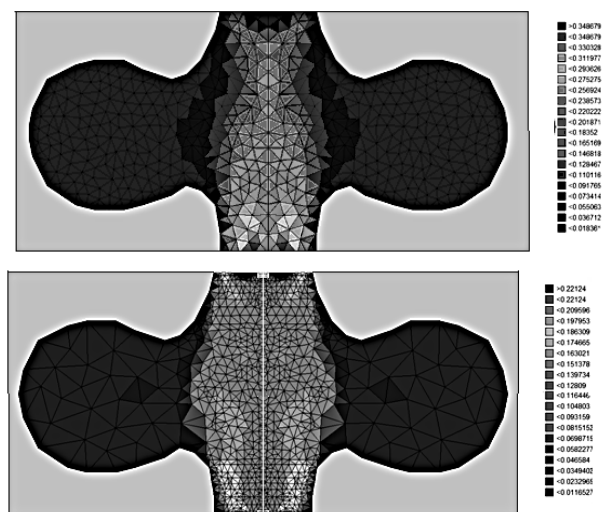


Рис.1. Распределение продольной компоненты скорости W в поре для сетки с числом КЭ 751 и 1837.

Список литературы

1. *Dimitrienko Yu.I.* Heat-mass-transfer and thermal stresses in porous charring materials// *Transport in Pore Media*. - 1997.-v.27(2).-P.143-170.
2. *Димитриенко Ю.И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах.-М.:Машиностроение.- 1997.-356 с.
3. *Димитриенко Ю.И., Глазиков М.Л.* Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах// *Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки.*- №1.-2003.- с.59-71.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ И ТЕРМОРАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛАЗЕРНОМ НАГРЕВЕ

Ю.И. Димитриенко, В.В. Минин, А.И. Балашкин
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Термомеханическое поведение композитов при высокотемпературном нагреве согласно модели [1-5] описывается системой из 3-х уравнений внутреннего тепломассопереноса в композите и системы уравнений тонкостенных оболочек типа С.П.Тимошенко, с независимой аппроксимацией напряжений межслойного сдвига и учитывающей поперечные напряжения. В ортонормированных координатах q_1, q_2, q_3 , связанных со срединной поверхностью оболочки (ось Oq_3 направлена по нормали к срединной поверхности) система уравнений внутреннего тепломассопереноса имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\lambda_1 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\lambda_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\lambda_3 \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \right) + \\ &+ c_g R_g \left(\frac{K_1}{A_1^2} \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \frac{\partial p_g \theta}{\partial q_1} + \frac{K_2}{A_2^2} \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \frac{\partial p_g \theta}{\partial q_2} + K_3 \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \frac{\partial p_g \theta}{\partial q_3} \right) - \Delta e^0 J, \\ \frac{\partial p_g}{\partial t} &= \frac{R_g}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(K_1 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial p_g \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{R_g}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(K_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial p_g \theta}{\partial q_2} \right) + R_g \frac{\partial}{\partial q_3} \left(K_3 \frac{\partial p_g \theta}{\partial q_3} \right) + \Gamma J, \\ \rho_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} &= -J, \quad J = J_0 \varphi_b \exp\left(-\frac{E_a}{R_g \theta}\right), \quad p_g = R_g \rho_g \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где A_α, k_α – параметры первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки; θ – температура; ρ – плотность композита, c – удельная теплоемкость композита, c_b, c_p, c_f и ρ_b, ρ_p, ρ_f удельные теплоемкости и плотности полимерной и коксовой фаз матрицы и волокон – для них имеют место соотношения: $\rho c = \varphi_b \rho_b + \varphi_p \rho_p + \varphi_f \rho_f$, Здесь φ_b, φ_p – содержание полимера и кокса в композите, φ_f – объемная доля волокон в композите, p_g – давление газообразных продуктов в композите, Γ – коэффициент газификации, J – массовая скорость термодеструкции, Δe^0 – теплота терморазложения, K_α – коэффициенты газопроницаемости. c_g, ρ_g – удельная теплоемкость и плотность газовой фазы композита, R_g – газовая постоянная, φ_g – пористость композита. Содержание кокса φ_p в композите определяется по формуле: $\varphi_p = (\varphi_b(0) - \varphi_b(t)) \frac{\rho_b}{\rho_p} (1 - \Gamma)$, кроме того имеет место соотношение нормировки $\varphi_b + \varphi_p + \varphi_f + \varphi_g = 1$. Композит здесь и далее полагается ортотропным, главные оси ортотропии совпадают с направлениями координатных линий q_1, q_2, q_3 .

Полагаем, что на поверхностях оболочки $q_3 = \pm h/2$ заданы тепловые потоки: $q_w = q_0$, где: $q_w = \pm \lambda_3 \partial \theta / \partial q_3$ – тепловой поток, затрачиваемый на нагрев оболочки; $q_0 = (q_e + q_R - q_{RS} - q_{bl})$ – суммарный тепловой поток к поверхности, $q_e = (\alpha^T / c_p)(c_p \theta_g - c\theta)$ – конвективный тепловой поток, α^T – коэффициент теплообмена; θ_g – температура внешнего газового потока, $q_R = q_R^0 \exp(-\frac{r}{\delta})$ – лучистый тепловой поток, подводимый к оболочке за счет локального лазерного нагрева, где $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, а где δ – эффективный радиус пятна нагрева; $q_{RS} = \varepsilon_s \sigma_{SB} \theta_s^4$ – тепловой поток, отдаваемый газу от нагретой поверхности твердого топлива, σ_{SB} – постоянная Стефана-Больцмана; ε_s – интегральный коэффициент излучения; $q_{bl} = -\gamma_{bl} R_g K_3 (\partial \rho_g \theta / \partial q_3)(c_p \theta_g - c\theta)$ – конвективный тепловой поток, отводимый от поверхности вследствие вдува продуктов через поры, γ_{bl} – коэффициент вдува.

Уравнения механического равновесия запишем в вариационной формулировке – как минимум функционала Хеллингера-Рейсснера [1–2]

$$\delta J_\Sigma(u, e) = 0, \quad (2)$$

где A_Σ^e – работа суммарных внешних сил и $J_\Sigma(u, e)$ – функционал вида:

$$J_\Sigma(u, e) = \int_\Sigma \{e\}^T [V] [L] \{u\} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_\Sigma \{e\}^T [V] \{e\} d\Sigma + A_\Sigma^e, \quad (3)$$

$$A_\Sigma^e = - \int_{\partial \Sigma} \{\dot{S}\} \{u\} dl - \int_\Sigma (\{T\} + \{F\}) \{u\} d\Sigma.$$

Здесь обозначены координатные столбцы перемещений $\{u\}$, деформаций оболочки $\{e\}$, а также усилий $\{T\}$ и тепловых нагрузок $\{\dot{T}\}$, массовых сил $\{F\}$ и поверхностных усилий $\{\dot{S}\}$ на контуре $\partial \Sigma$ срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \{u\} &= (U_1, U_2, W, \gamma_1, \gamma_2)^T, \quad \{e\} = (e_{11}, e_{22}, e_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, e_{13}, e_{23})^T, \\ \{T\} &= \left\{ T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2 \right\}^T, \quad \{\dot{S}\} = \left\{ \dot{T}_{11}, \dot{T}_{22}, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{22}, \dot{Q} \right\}, \\ \{F\} &= \left\{ \partial P_g / \partial q_1, \partial P_g / \partial q_2, (k_1 + k_2) P_g, \partial M_g / \partial q_1, \partial M_g / \partial q_2 \right\}, \\ \{\dot{T}\} &= \left\{ \dot{T}_{11}, \dot{T}_{22}, 0, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{22}, 0, 0, 0 \right\}^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Введены обозначения: $T_{\alpha\alpha}, T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\beta}$ – усилия и моменты в оболочке; Q_α – перерезывающие усилия; P_g, M_g – усилие и момент порового давления в оболочке, $e_{\alpha\alpha}, e_{\alpha\beta}, e_{12}$ – деформации срединной поверхности оболочки; $\kappa_{\alpha\alpha}, \kappa_{\alpha\beta}, \kappa_{12}$ – искривления срединной поверхности; $U_\alpha, \gamma_\alpha, W$ – перемещения, углы искривления и прогиб срединной поверхности; p_e – перепад давлений на оболочке, а также $[V]$ – обобщенная матрица упругости размером 8×8 , связывающая столбцы усилий и деформаций: $\{\dot{T}\} = [V] \{e\}$, эта матрица образована из матриц $[C], [N], [D], [K]$:

$$[V] = \begin{pmatrix} [C] & [N] & 0 \\ [N] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [K] \end{pmatrix}, [C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$[N] = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{12} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{66} \end{pmatrix}, [D] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix}, [K] = \begin{pmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{pmatrix}.$$

Мембранные, смешанные и изгибные жесткости оболочки $C_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, D_{\alpha\beta}$ вследствие размягчения полимерной матрицы и её термодеструкции изменяются при нагреве. Это изменение для ортотропных композитных оболочек, согласно модели [1], описывается с помощью 2-х функций $a_{\theta 1}, a_{\theta 2}$:

$$C_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(0)}, N_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(1)}, M_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(2)}, \quad (6)$$

$$C_{\alpha+3, \alpha+3} = \overset{\circ}{C}_{\alpha+3, \alpha+3} a_{\theta 2}^{(0)}, \alpha=1,2; a_{\theta k}^{(j)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a_{\theta k} q_3^j dq_3, \quad k=1,2; j=0,1,2;$$

где $\overset{\circ}{C}_{\alpha\beta}, \overset{\circ}{D}_{\alpha\beta}$ – жесткости при нормальной температуре: $\theta = \theta_0 = 293K$. Функции $a_{\theta k} = a_{\theta k}(\theta, \varphi_b)$ зависят от температуры θ и концентрации полимера φ_b , их выражение получены в [1]. Формулы функция $a_{\theta 1}$ описывает температурное изменение упругих свойств композита при растяжении и сдвиге в плоскости ткани Oq_1q_2 , а функция $a_{\theta 2}$ – при растяжении в трансверсальном направлении Oq_3 и при межслойных сдвигах

Усилия и моменты тепловых напряжений $\overset{\circ}{T}_{\alpha}, \overset{\circ}{M}_{\alpha}$ зависят от тепловой деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha}$ композита:

$$\overset{\circ}{T}_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\beta}^{(0)}, \quad \overset{\circ}{M}_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\beta}^{(1)}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\beta}^{(j)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a_{\theta 1} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\beta} q_3^j dq_3, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_3^{(j)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a_{\theta 2} \overset{\circ}{\varepsilon}_3 q_3^j dq_3, \quad (7)$$

где $j=0,1$, $\alpha=1,2$, а также

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\gamma} = (\alpha_f \varphi_f B_{\gamma} + \alpha_b \varphi_b \Omega_{\gamma})(\theta - \theta_0) + \alpha_p \Omega_{\gamma} \int_0^t (\theta(t) - \theta(\tau)) \overset{\circ}{\varphi}_p d\tau - \beta_p \varphi_p \Omega_{\gamma}, \quad \gamma=1,2,3; \quad (8)$$

где $\alpha_f, \alpha_b, \alpha_p$ – коэффициенты теплового расширения волокна, полимера и коксового остатка термодеструкции полимера, β_p – коэффициент усадки, $B_{\gamma}, \Omega_{\gamma}$ – коэффициенты, зависящие от расположения волокон в композите [1]. Усилия и моменты межфазного взаимодействия $P_{g\alpha}, M_{g\alpha}$, а также усилия и моменты порового давления P_g, M_g в оболочке вычисляются следующим образом:

$$P_{g\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_g f_{\alpha} dq_3, \quad M_{g\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_g f_{\alpha} q_3 dq_3, \quad P_g = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_g p_g dq_3, \quad M_g = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_g p_g q_3 dq_3 \quad (9)$$

где φ_g – пористость композита: $\varphi_g = 1 - \varphi_b - \varphi_p - \varphi_f$, а f_{α} – коэффициент межфазного взаимодействия [1].

Коэффициенты теплопроводности $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\theta, \varphi_p, \varphi_f, \varphi_g)$ являются функциями температуры и содержания фаз композита и вычисляются по формулам [1]. Коэффициенты газопроницаемости K_α вычисляются по формуле $K_\alpha = K_\alpha^\circ \exp(s\varphi_g^{1/3})$ где K_α и s – константы.

Решение вариационного уравнений (2) ищется методом конечного элемента, на основе треугольного шестиузлового КЭ с независимой аппроксимацией перемещений и деформаций в КЭ.

Для решения уравнений тепломассопереноса в оболочке был предложен следующий алгоритм. При локальном нагреве вся поверхность оболочки может быть условно разделена на 2 части: Σ_{e1} – в которой задана «основная часть» плотности лучистого теплового потока q_R и Σ_{e2} – оставшаяся часть внешней поверхности, где плотность теплового потока q_R существенно меньше. Тогда решение системы (1) можно также разделить на 2 этапа: решение в области V_1 , граница которой содержит поверхность Σ_{e1} и решение в оставшейся области V_2 задачи ($V_1 \cup V_2 = V$). В области V_1 решается общая система уравнений (1) в трехмерной постановке, а в области V_2 – упрощенная одномерная (по координате q_3) система уравнений, в которой решение от координат q_1, q_2 зависит только параметрически. Для ее численного решения области применен конечно-разностный метод в сочетании с пошаговым методом линеаризации.

Для решения задачи (1) в области V_1 введем конечно-разностную сетку для области V_1 , узлы которой обозначим как $\bar{q}_{1i}, \bar{q}_{2j}, \bar{q}_{3k}$, $i=1...N_1, j=1...N_2, k=1...N_3$, а $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \Delta t$ – шаги разностной сетки. Обозначим значения безразмерных функций в узлах разностной сетки на k -ом временном шаге как $\theta_{ijk}^m, \bar{\rho}_{gijk}^m$ и введем разностные операторы $\Lambda_{\rho1} \bar{\rho}_g^{m+1}, \Lambda_{\rho2} \bar{\rho}_g^{m+1}, \Lambda_{\rho3} \bar{\rho}_g^{m+1}, \Lambda_1 \theta^{m+1}, \Lambda_2 \theta^{m+1}, \Lambda_3 \theta^{m+1}$:

$$\Lambda_{\rho1} \bar{\rho}_g^{m+1} = \frac{F_r \beta^2}{(\bar{A}_1 \bar{A}_2)_{ijk} \Delta q_1^2} \left(\frac{\bar{K}_{1,i+1,jk}^m (\bar{A}_2)_{i+1,jk}}{(\bar{A}_1)_{i+1,jk}} (\bar{\rho}_{gi+1,jk}^{m+1} \bar{\theta}_{i+1,jk}^m - \bar{\rho}_{gijk}^{m+1} \bar{\theta}_{i,jk}^m) - \frac{\bar{K}_{1,jk}^m (\bar{A}_2)_{ijk}}{(\bar{A}_1)_{ijk}} (\bar{\rho}_{gijk}^{m+1} \bar{\theta}_{ijk}^m - \bar{\rho}_{gi-1,jk}^{m+1} \bar{\theta}_{i-1,jk}^m) \right), \quad (10)$$

$$\Lambda_1 \theta^{m+1} = \frac{F_0}{(\bar{A}_1 \bar{A}_2)_{ijk} \Delta q_1^2} \left(\frac{\bar{K}_{1,i+1,jk}^m (\bar{A}_2)_{i+1,jk}}{(\bar{A}_1)_{i+1,jk}} (\bar{\theta}_{i+1,jk}^{m+1} - \bar{\theta}_{i,jk}^{m+1}) - \frac{\bar{K}_{1,jk}^m (\bar{A}_2)_{ijk}}{(\bar{A}_1)_{ijk}} (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1} - \bar{\theta}_{i-1,jk}^{m+1}) \right).$$

Остальные операторы вводятся аналогичным образом. Тогда для системы уравнений (1) можно записать следующую трехслойную разностную схему:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_b (\varphi_{b,ijk}^{m+1} - \varphi_{b,ijk}^m) &= -\Delta t \bar{F}_g \bar{J} (\varphi_{b,ijk}^{m+1}, \bar{\theta}_{ijk}^m) \\ (\bar{\rho}_{gijk}^{m+1/4} - \bar{\rho}_{gijk}^m) &= \frac{\Delta t}{3} \Lambda_{\rho1} \bar{\rho}_g^{m+1/4}, \quad (\bar{\rho}_{gijk}^{m+1/2} - \bar{\rho}_{gijk}^{m+1/4}) = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_{\rho2} \bar{\rho}_g^{m+1/2}, \\ (\bar{\rho}_{gijk}^{m+3/4} - \bar{\rho}_{gijk}^{m+1/2}) &= \frac{\Delta t}{3} \Lambda_{\rho3} \bar{\rho}_g^{m+3/4}, \quad (\bar{\rho}_{gijk}^{m+1} - \bar{\rho}_{gijk}^m) = \Delta t (\Lambda_{\rho1} + \Lambda_{\rho2} + \Lambda_{\rho3}) \bar{\rho}_g^{m+3/4} + \int_{\rho}^m \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

$$(\bar{\rho}c)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{jk}^{m+1/4} - \bar{\theta}_{jk}^m) = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_1 \bar{\theta}^{m+1/4}; \quad (\bar{\rho}c)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{jk}^{m+1/2} - \bar{\theta}_{jk}^{m+1/4}) = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_2 \bar{\theta}^{m+1/2};$$

$$(\bar{\rho}c)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{jk}^{m+3/4} - \bar{\theta}_{jk}^{m+1/2}) = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_3 \bar{\theta}^{m+3/4}; \quad (\bar{\rho}c)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{jk}^{m+1} - \bar{\theta}_{jk}^m) = \Delta t (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \bar{\theta}^{m+3/4} + f^m \Delta t$$

После формирования разностной аппроксимации граничных условий к этой системе, для ее решения применялся метод матричной прогонки по координатным направлениям i, j, k .

После вычисления полей температуры $\bar{\theta}$, содержания фаз φ_p , φ_g и плотности газовой фазы, рассчитывалось поровое давление $p_g = R\rho_g \theta$ и тепловые деформации композита по формулам (8), а затем усилия и моменты по формуле $\{T\} = [V]\{e\} - \{\dot{T}\}$ и изменение жесткостей оболочки при нагреве по формулам (6). После чего определялись перемещения $\{v\}$ и деформации $\{e\}$ в КЭ. Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ после этого вычислялись обычным образом: $\sigma_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}/h$ где h – толщина оболочки. Для расчета межслойных $\sigma_{\alpha 3}$ и поперечных напряжений σ_{33} в оболочке применялась следующая аппроксимация:

$$\sigma_{\alpha 3} = \psi_{\alpha}(q_1, q_2) \eta(q_3), \quad \alpha = 1, 2, \quad \sigma_{33} = -p^- - (p^+ - p^-) \xi + \psi_3(q_1, q_2) \eta(q_3) \quad (12)$$

где $\xi(q_3) = 1/2 - q_3/h$, $\eta(q_3) = 1/4 - (q_3/h)^2$, а p^+, p^- – давления на внешних поверхностях оболочки, $p_e = p^+ - p^-$. Функции ψ_{α}, ψ_3 определялись из интегральных определяющих соотношений оболочки при сдвиге и поперечном растяжении:

$$\psi_{\alpha} = 12C_{\alpha+3, \alpha+3} e_{\alpha 3}, \quad \psi_3 = 6(C_{13} e_{13} + C_{23} e_{23}) + 3(p^+ + p^-) \quad (13)$$

Численные расчеты были проведены для цилиндрической оболочки у которой индекс $\alpha=1$ соответствует направлению вдоль оси симметрии, а $\alpha=2$ – окружному направлению. Был рассмотрен случай локального лазерного нагрева оболочки, при котором максимальная плотность мощности нагрева составляла $q_R=100$ кВт/м², одновременно воздействовало внутреннее давление $p_e=0.3$ МПа Торцы оболочки свободны от нагрузки. Характеристики композита соответствовали эпоксифенольному тканевому стеклопластику. Длина оболочки $L=3$ м, радиус $R=1$ м, толщина $h=5 \cdot 10^{-3}$ м, радиус пятна нагрева $\delta=0.02$ м. Максимальная температура нагрева составляла 1067°C. На рис.1 представлены результаты расчета полей температуры и порового давления в виде двумерных графиков распределения функций по толщине оболочке в различные моменты времени для центра пятна нагрева (точка Т0). Распределение температуры по толщине оболочки имеет характерный монотонноубывающий профиль, который с течением времени смещается к тыльной (ненагреваемой) поверхности оболочки (рис.1). При достижении условной температуры начала термодеструкции в том слое, до которого дошел температурный фронт, резко интенсифицируется термодеструкция полимерной матрицы. В результате в композите возникает зона интенсивной термодеструкции, которая распространяется вглубь толщины оболочки. При $t=16$ с уровень температуры примерно в $3/4$ толщины оболочки превышает условную температуру начала термодеструкции материала.

Поровое давление газов, появление которых также обусловлено термодеструкцией, резко возрастает в указанной зоне, достигая максимальных значений в 65 атмосфер (рис.1). На рис.2 показано распределение температурной деформации ε_2^0 по толщине оболочки в различные моменты времени в точке T_0 . В зоне термодеструкции функции $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0$ меняют знак и становятся отрицательными, поскольку происходит усадка композита.

На рис.3 представлена картина распределения значений прогиба W в срединной поверхности оболочки для различных моментов времени. В моменты $t < 2$ с максимум прогиба оболочки соответствует центру пятна нагрева, причем оболочка выгибается по направлению к источнику нагрева. При $t = 10$ с вместо одного появляются два локальных максимума, что связано с началом интенсивного процесса термодеструкции. Далее эти максимумы «разделяются» и «расходятся» в разные стороны по окружной координате q_2 . К моменту времени $t = 28$ с картина распределения прогиба полностью меняется (рис.3): в центре пятна возникает локальный максимум прогиба, но направленный уже в сторону от источника нагрева, а на периферии формируются новые пики прогиба, ориентированные по направлению к тепловому источнику.

Картина распределения значений тангенциального напряжения σ_2 в срединной поверхности оболочки также существенно меняется с течением времени нагрева. При $t < 2$ с возникает двойной максимум растягивающих напряжений в зоне пятна нагрева (рис.4). При дальнейшем нагреве эти максимумы «разделяются», но остаются в окрестности зоны нагрева. Интенсификация процесса термодеструкции при $t > 20$ с, сопровождающаяся изменением знака тепловых деформаций, приводит к тому, что локальные максимумы преобразуются в минимумы напряжений. Кроме того появляются два новых локальных минимума напряжений σ_2 , ориентированных по оси Oq_1 . При $t = 28$ с картина еще раз меняется – минимумы напряжений снова преобразуются в максимумы и, в целом, реализуется 4 локальных максимума: два ориентированных по оси Oq_1 и 2 – по оси Oq_2 .

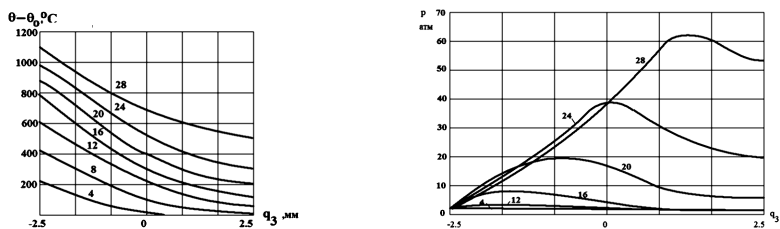


Рис.1. Распределение температуры и порового давления по толщине оболочке в центре пятна нагрева для различных моментов времени (цифры у кривых – моменты времени t , с).

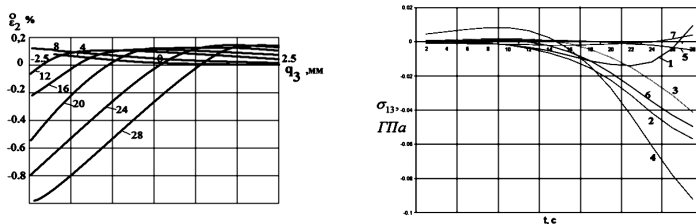


Рис.2. Распределение температурной деформации по толщине пластины в центре пятна нагрева в различные моменты времени и зависимость сдвигового напряжения порового давления по от времени толщине оболочки в 7 контрольных точках на срединной поверхности для $t=28$ с.

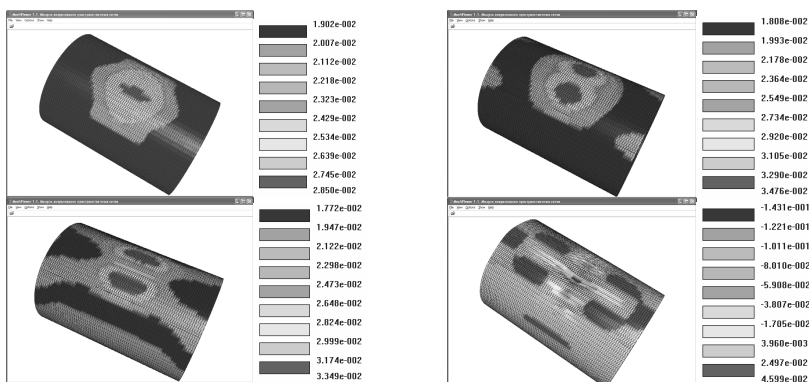


Рис.3. Распределение перемещения W , м по срединной поверхности цилиндрической оболочки в моменты времени $t=2, 14, 16, 28$ с.

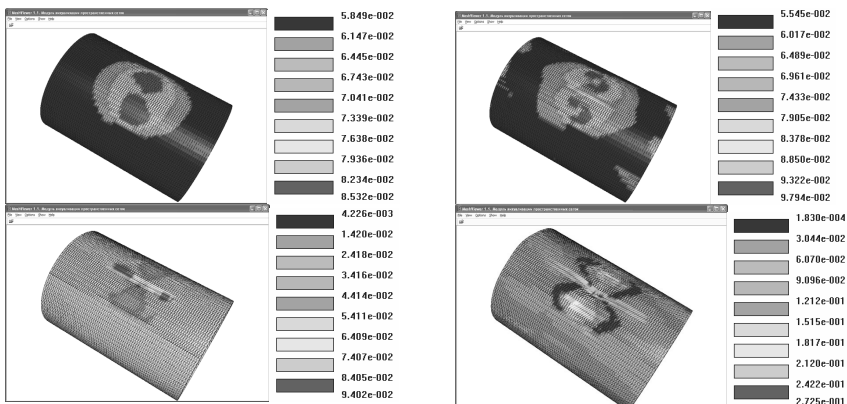


Рис.4. Распределение напряжения σ_2 , ГПа по срединной поверхности цилиндрической оболочки в моменты времени $t=2, 16, 20, 28$ с.

Список литературы

1. *Ю.И. Димитриенко.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. -М.: Машиностроение, 1997. -362 с.
2. *Yu.I. Dimitrienko.* Thermomechanics of Composites under High Temperatures.-Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers,1999.-347 p.
3. *Yu.I. Dimitrienko.* A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures // Composite science and technologies. - 1999. - V. 59, №. 8. - P. 1041-1053.
4. *Yu.I. Dimitrienko.* Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. // Int. Journal of Applied Composite Materials. Part 3. Textile Composites. - 1998. - V. 5, №. 4. - P. 257-272.
5. *Yu.I. Dimitrienko.* Thermomechanical behaviour of composites under local intense heating by irradiation //Composites. Part A. - 2000.-V. 31. - P. 591-598.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРО-ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ю.И. Димитриенко, Е.С. Ничеговский

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Материалы с пьезоэлектро-вязкоупругими свойствами играют важную роль в электротехнике. В связи с развитием нанотехнологий резко возрос интерес к разработке методов моделирования новых материалов с необычными свойствами. В работе разработан вариант метода асимптотического осреднения (МАО) [1-3], предназначенный для моделирования пьезоэлектро-вязкоупругих свойств композиционных материалов, исходя из свойств составляющих их фаз и геометрической структуре композита.

Постановка задачи. Рассмотрим композиционный материал, обладающий периодической структурой, ячейка периодичности (ЯП) V_ξ которого состоит из N фаз $V_\alpha, \alpha=1, \dots, N$. Введем малый параметр $\kappa = l/L \ll 1$, где l – характерный размер ЯП, L – характерный линейный размер всего композита. Введем декартовы координаты x^k , глобальные координаты $\bar{x}^k = x^k/L$ и локальные координаты $\xi^k = x^k/\kappa$. Рассмотрим для такой структуры задачу пьезоэлектро-вязкоупругости при установившихся моногармонических колебаниях, предполагая выполненными условия идеального контакта на поверхности раздела $\Sigma_{\alpha\beta}$ между компонентами:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0; \quad (1), \quad -d_{i,i} + \rho_e = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \nu_{kj} e_k; \quad (3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (4)$$

$$d_i = \nu_{ikl} \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ik} e_k; \quad (5) \quad e_k = \varphi_{,k}; \quad (6)$$

$$[u_i] = 0, \quad [\sigma_{ij}] n_j = 0, \text{ на } \Sigma_{ij}; \quad (7)$$

$$[\varphi] = 0, \quad [d_i] n_i = 0, \text{ на } \Sigma_{ij}; \quad (8)$$

$$u^i|_{\Sigma_u} = u_e^i, \quad \sigma_{ij}|_{\Sigma_\sigma} n_j = S_i \quad (9)$$

$$\varphi|_{\Sigma_\varphi} = \varphi_e, \quad d_i n_i|_{\Sigma_d} = d_{ne}. \quad (10)$$

Здесь (1) – уравнения установившихся механических колебаний, (2) – уравнение Гаусса, (3) – соотношения вязкоупругости с учетом пьезоупругого эффекта, (4) – соотношения Коши, (5) – электрические соотношения с учетом обратного пьезоэффекта, (6) – выражение для электрического потенциала, (7) – условия идеального механического контакта на границе раздела компонентов, (8) – соотношения идеального электрического контакта на границе раздела, (9) – граничные кинематические и статические условия на частях внешней поверхности Σ_u и Σ_σ , (10) – электрические граничные условия, C_{ijkl} – комплексные модули упругости компонентов композита, зависящие от частоты колебаний и связанные с тензорами ядер релаксации $R_{ijkl}(t)$ с помощью

преобразования Фурье: $C_{ijkl}(\omega) = \int_0^\infty R_{ijkl}(t) e^{-i\omega t} dt$; σ_{ij} , ε_{ij} и u_i – комплексные

амплитуды компонент тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений; ν_{ijk} – компоненты тензора комплексных пьезоэлектрических коэффициентов, ε_{ij} – компоненты тензора комплексных диэлектрических постоянных, e_i и d_i – комплексные амплитуды компонент векторов напряженности электрического поля и электрической индукции; φ – комплексная амплитуда электрический потенциал, ω – частота электромеханических колебаний. Предполагаются известными все характеристики фаз композита, поэтому C_{ijkl} , ν_{ijk} , ε_{ij} полагаются зависящими как от частоты ω так и локальных координат ξ^k , ставиться задача найти аналогичные эффективные (осредненные) характеристики для всего композита.

Согласно методу асимптотических разложений, решение задачи (1)–(10) строится в виде асимптотических разложений следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^{(0)}(x^k) + \kappa u_i^{(1)}(x^k, \xi^l) + k^2 \dots; & \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \varepsilon_{ij}^{(1)}(x^k, \xi^l) + k^2 \dots; \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \sigma_{ij}^{(1)}(x^k, \xi^l) + k^2 \dots; & \varphi &= \varphi^{(0)}(x^k) + k \varphi^{(1)}(x^k, \xi^l) + k^2 \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (1)–(10), получаем в нулевом приближении локальную задачу пьезоэлектро-вязкоупругости:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij/l}^{(0)} &= 0; & -d_{i/l}^{(0)} &= 0; \\
\sigma_{ij}^{(0)} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(0)} + \nu_{kij} e_k^{(0)}; & \varepsilon_{ij}^{(0)} &= \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} (u_{i/l}^{(1)} + u_{j/i}^{(1)}); \\
d_i^{(0)} &= \nu_{ikl} \varepsilon_{kl}^{(0)} - \varepsilon_{ik} e_k^{(0)}; & e_k^{(0)} &= \varphi_k^{(1)} + \bar{e}_k; \\
[u_i^{(1)}] &= 0, & [\sigma_{ij}^{(0)}] n_j &= 0, & [\varphi^{(1)}] &= 0, & [d_i^{(0)}] n_i &= 0, \\
\langle u_i^{(1)} \rangle &= 0; & \langle \varphi^{(1)} \rangle &= 0; & [[u_i^{(1)}]] &= 0; & [[\varphi^{(1)}]] &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_{ij} = (u_{i/l}^{(o)} + u_{j/i}^{(o)})/2$ – компоненты тензора осредненных деформаций композита и $\bar{e}_k = e_k^{(o)}$ – компоненты осредненного вектора напряженности электрического поля (в локальной задаче являются заданными величинами), $[[\quad]]$ – условие периодичности функций на границе ЯП, $\langle \quad \rangle$ – операция осреднения на ЯП. Здесь обозначены также: $,l = \partial/\partial \bar{x}^l$ и $i,l = \partial/\partial \xi^l$ – производные по двум типам координат, $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ – поверхность контакта двух компонент композита в пределах отдельно взятой ЯП, т.е. $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta} = \Sigma_{\xi\alpha\beta} \cap V_\alpha$. Задача (12) содержит 9 входных функций $\bar{\varepsilon}_{ij}$ и $\bar{e}_k$, будем искать ее решение в виде суммы по этим функциям:

$$u_i^{(1)} = \sum_{p,q=1}^3 u_{i(pq)} + \sum_{r=1}^3 u_{i(r)}, \quad \varphi = \sum_{r=1}^3 \varphi_{(r)} + \sum_{p,q=1}^3 \varphi_{(pq)}, \tag{13}$$

где $u_{i(pq)}$ и $\varphi_{(r)}$ имеют следующий вид:

$$u_{i(pq)} = -\bar{\varepsilon}_{pq} (\delta_{ip} \xi_q + \delta_{iq} \xi_p) + U_{i(pq)}, \quad \varphi_{(r)} = -\bar{e}_r \xi_r + \Psi_{(r)}, \tag{14}$$

а $U_{i(pq)}$ и $\Psi_{(r)}$ – новые неизвестные функции. Подставляя (13) и (14) в (12), находим выражение для $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $e_k^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(0)}$ и $d_i^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{(0)} &= \sum_{p,q=1}^3 \varepsilon_{ij(pq)}^{(0)} + \sum_{r=1}^3 \varepsilon_{ij(r)}^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij(pq)}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{p,q} (U_{i(pq)/j} + U_{j(pq)/i}), \quad \varepsilon_{ij(r)}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_r (u_{i(r)/j} + u_{j(r)/i}) \\
e_k^{(0)} &= \sum_{r=1}^3 e_{k(r)}^{(0)} + \sum_{p,q=1}^3 e_{k(pq)}^{(0)}, \quad e_{k(r)}^{(0)} = \Psi_{(r)/k}, \quad e_{k(pq)}^{(0)} = \varphi_{(pq)/k} \\
\sigma_{ij}^{(0)} &= \sum_{p,q=1}^3 \sigma_{ij(pq)}^{(0)} + \sum_{r=1}^3 \sigma_{ij(r)}^{(0)}, \quad d_i^{(0)} = \sum_{r=1}^3 d_{i(r)}^{(0)} + \sum_{p,q=1}^3 d_{i(pq)}^{(0)}
\end{aligned} \tag{15}$$

Тогда задачу (12) можно разделить на 9 отдельных связанных задач теории электро-пьезоупругости:

$$\begin{aligned}
\langle L_{pq} \rangle: & \begin{cases} \sigma_{ij(pq)/j}^{(0)} = 0; \\ \sigma_{ij(pq)}^{(0)} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl(pq)}^{(0)} + \nu_{kij} e_{k(pq)}^{(0)}; \\ -d_{i(pq)/i}^{(0)} = 0; \\ d_{i(pq)}^{(0)} = \nu_{ikl} \varepsilon_{kl(pq)}^{(0)} - \varepsilon_{ik} e_{k(pq)}^{(0)} \end{cases} \\
\langle L_r \rangle: & \begin{cases} \sigma_{ij(r)/j}^{(0)} = 0; \\ \sigma_{ij(r)}^{(0)} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl(r)}^{(0)} + \nu_{kij} e_{k(r)}^{(0)} \\ -d_{i(r)/i}^{(0)} = 0; \\ d_{i(r)}^{(0)} = \nu_{ikl} \varepsilon_{kl(r)}^{(0)} - \varepsilon_{ik} e_{k(r)}^{(0)}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{16}$$

С помощью представления решения в форме (13)–(15) уравнения (16) можно сформулировать не для всей ЯП, а для 1/8 ее части, граничные условия для этих систем уравнений на 1/8 ЯП имеют следующий вид:

Для задач L_{pq} :

$$\text{При } (p=q) \quad U_{i(pq)} = (\bar{\varepsilon}_{pq}/2)\delta_{ip}, \quad \text{на } \Sigma_i', \quad U_{i(pq)} = 0 \quad \text{на } \Sigma_i \quad (17)$$

$$S_{j(pq)} = 0, \quad S_{k(pq)} = 0, \quad \text{на } \Sigma_i \quad \text{и} \quad \Sigma_i', \quad i \neq j \neq k \neq i$$

$$\text{При } (p \neq q) \quad U_{i(pq)} = (\bar{\varepsilon}_{ip}/4)\delta_{ip}, \quad \text{на } \Sigma_j', \quad U_{i(pq)} = 0, \quad \text{на } \Sigma_j, \\ S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0, \quad \text{на } \Sigma_j \text{ и } \Sigma_j', \quad i, j = \{p, q\} \quad (18)$$

$$S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{k(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0, \quad \text{на } \Sigma_k \text{ и } \Sigma_k', \quad i \neq j \neq k \neq i$$

$$\text{При } p=q \quad \varphi_{(pp)}|_{\Sigma_p} = 0, \quad \varphi_{(pp)}|_{\Sigma_p'} = 0.5\bar{\varepsilon}_p \quad (19)$$

$$\text{При } p \neq q \quad \varphi_{(pq)q}|_{\Sigma_q} = 0, \quad \varphi_{(pq)q}|_{\Sigma_q'} = 0$$

$$\text{Для задач } L_r: \quad U_{i(r)} = (\bar{\varepsilon}_{rr}/2)\delta_{ir}, \quad \text{на } \Sigma_i', \quad U_{i(r)} = 0 \quad \text{на } \Sigma_i \quad (20)$$

$$S_{j(r)} = 0, \quad S_{k(r)} = 0, \quad \text{на } \Sigma_i \quad \text{и} \quad \Sigma_i', \quad i \neq j \neq k \neq i$$

$$\varphi_{(r)}|_{\Sigma_r} = 0, \quad \varphi_{(r)}|_{\Sigma_r'} = 0.5\bar{\varepsilon}_r \quad (21)$$

где $S_{j(pq)} = \sigma_{ji(pq)} n_i$, $i \neq j$ – компоненты векторов усилий, $\Sigma_i = \{\xi_i = 0\}$ – координатные поверхности, $\Sigma_i' = \{\xi_i = 1/2\}$ – внешние поверхности 1/8 ЯП.

После решения локальных задач L_{pq} , L_p могут быть вычислены осредненные поля напряжений и электрической индукции:

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \sum_{p,q} \langle \sigma_{ij(pq)}^{(0)} \rangle + \sum_r \langle \sigma_{ij(r)}^{(0)} \rangle, \quad -\langle d_i^{(0)} \rangle = \sum_r \langle d_{i(r)}^{(0)} \rangle + \sum_{p,q} \langle d_{i(pq)}^{(0)} \rangle \quad (22)$$

Соотношения между этими осредненными полями и средними полями деформаций и напряженности электрического поля образуют искомые эффективные определяющие соотношения композита:

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \sum_{p,q=1}^3 \bar{C}_{ijpq} \bar{\varepsilon}_{pq} + \sum_{r=1}^3 \bar{\nu}_{rij} \bar{\varepsilon}_r; \quad -\langle d_i^{(0)} \rangle = \sum_{p,q=1}^3 \bar{\nu}_{ipq} \bar{\varepsilon}_{pq} - \sum_{r=1}^3 \bar{\varepsilon}_{ir} \bar{\varepsilon}_r. \quad (23)$$

Из этих соотношений находим компоненты $\bar{C}_{ijkl}$ – эффективного тензора комплексных модулей упругости, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ – тензора комплексной диэлектрической проницаемости и $\bar{\nu}_{ijk}$ – эффективного тензора комплексных пьезоэлектрических коэффициентов композита:

$$\bar{C}_{ijpq} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pq}} \langle \sigma_{ij(pq)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_p=0}, \quad \bar{\varepsilon}_{ir} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}_r} \langle d_{i(r)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_{rr}=0}, \quad (24)$$

$$\bar{\nu}_{rij} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_r} \left(\sum_{p,q} \langle \sigma_{ij(pq)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_r \neq 0} + \sum_{r=1}^3 \langle \sigma_{ij(r)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_r \neq 0} \right), \quad \bar{\nu}_{ipq} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pq}} \left(\sum_{r=1}^3 \langle d_{i(r)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_{pq} \neq 0} + \sum_{p,q=1}^3 \langle d_{i(pq)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_{pq} \neq 0} \right),$$

где $\langle \sigma_{ij(pq)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_p=0}$ – осредненные напряжения в задаче L_{pq} при одной ненулевой компоненте $\bar{\varepsilon}_{pq}$ и всех нулевых компонентах $\bar{\varepsilon}_p$, а $\langle \sigma_{ij(pq)}^{(0)} \rangle_{\bar{\varepsilon}_r \neq 0}$ – осредненные напряжения в задаче L_{pq} при одной ненулевой компоненте $\bar{\varepsilon}_{pq}$ и одной ненулевой компоненте $\bar{\varepsilon}_r$. Остальные обозначения аналогичны.

Для решения локальных задач L_{pq} и был применен метод конечного элемента, при этом использовались программные технологии, разработанные на кафедре ФН-11 [3].

Были решены локальные задачи для ортогонально армированного волокнистого композита, состоящего из матрицы, армированной волокнами, ориентированными по 3 координатным направлениям. В качестве матрицы использован турмалин, обладающий тригональным (В-ромбоэдрическим) классом симметрии с группой анизотропии $3m$ (G_{18} по классификации [1]), а характеристики волокон были выбраны совпадающими с характеристиками α -кварца, также обладающего тригональным классом симметрии, но с группой анизотропии 32 (G_{18}).

На рис. 1–3 приведены распределения вещественных частей напряжений $Re\sigma_{ij}^{(0)}(p_q)$ в 1/8 ЯП электрической индукции, полученные в результате решения задач L_{pq} . На рис.4 приведено распределение вещественной части компоненты $Re d_{li}^{(0)}$ вектора электрической индукции в 1/8 ЯП композита в задаче L_I . В табл.1 представлены значения вещественных компонент эффективных тензоров модулей упругости, пьезоэлектрических коэффициентов и диэлектрических постоянных композита.

Таблица 1.

Значения независимых вещественных компонент эффективных тензоров модулей упругости $Re\bar{C}_{ijkl}$ (ГПа), пьезоэлектрических коэффициентов $Re\bar{v}_{ijk}$ $[Кл/м^2]$ и диэлектрических постоянных $Re\bar{\epsilon}_{ij}$ $[10^{-10}Ф/м]$ для 3-D ортогонально-армированного композита турмалин/ α -кварц.

$\bar{C}_{1111}$	$\bar{C}_{1122}$	$\bar{C}_{1133}$	$\bar{C}_{3333}$	$\bar{v}_{111}$	$\bar{v}_{123}$	$\bar{v}_{333}$	$\bar{v}_{131}$	$\bar{\epsilon}_{11}$	$\bar{\epsilon}_{33}$
123	28,9	12,6	124,6	0,155	0.024	0,102	0,079	0,465	0,437

На рис. 5 представлена зависимость тангенса угла потерь композита $tg\bar{\varphi}_{1111} = Im\bar{C}_{1111}(\omega)/Re\bar{C}_{1111}(\omega)$ для компоненты $\bar{C}_{1111}(\omega)$ от частоты колебаний. В результате численного моделирования было установлено, что у композита число пиков на частотной диаграмме $tg\bar{\varphi}_{1111}(\omega)$ равно сумме пиков матрицы и волокна, однако абсолютные значения $tg\bar{\varphi}_{1111}$ в точках экстремумов находятся в диапазоне значений $tg\varphi_{1111}$ матрицы и волокна.

На рис. 6 изображена действительная часть коэффициента диэлектрической проницаемости композита $Re\bar{\epsilon}_{11}$ в зависимости от содержания волокон φ_f , на рис. 7 – мнимая часть $Im\bar{\epsilon}_{11}$. Результаты расчетов показывают, что значения $Re\mu^*$, $Im\mu^*$ для 3D ортогонального композита укладываются в вилку Фойгта-Рейсса, что свидетельствует о хорошей точности предложенного метода расчета эффективных характеристик. В то же время сами соотношения (18) Фойгта или Рейсса не могут быть выбраны в качестве даже приближенных выражений для эффективного коэффициента магнитной проницаемости ввиду того, что эта вилка является слишком широкой.

Выводы: в работе разработан метод решения локальных задач пьезоэлектро-вязкоупругости "на ячейке периодичности" для композитов со сложными структурами армирования, основанный на переходе от задачи для полной ЯП к существенно более простой задаче на 1/8 ЯП. Разработан конечно-

элементный метод расчета эффективных пьезоэлектро-вязкоупругих характеристик композиционных материалов. Показано, что этот метод может быть использован для решения локальных задач и расчета эффективных характеристик композитов со сложными пространственными структурами армирования.

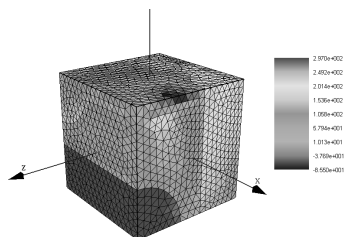


Рис. 1. Распределение напряжений $\sigma_{11(11)}^{(0)}$ (МПа) в 1/8 ЯП в задаче L_{11} .

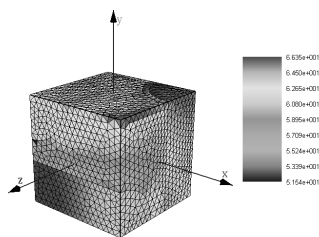


Рис. 2. Распределение напряжений $\sigma_{13(13)}^{(0)}$ (МПа) в 1/8 ЯП.

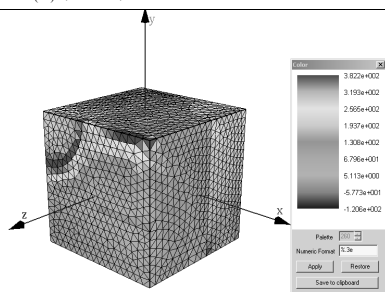


Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_{22(22)}^{(0)}$ (МПа) в 1/8 ЯП.

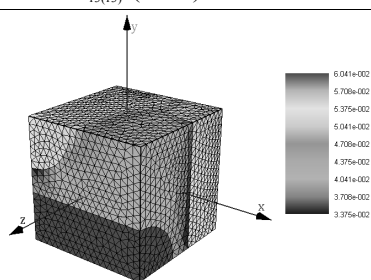


Рис. 4. Распределение компоненты $d_{1(1)}^{(0)}$ вектора электрической индукции в 1/8 ЯП композита в задаче L_1 .

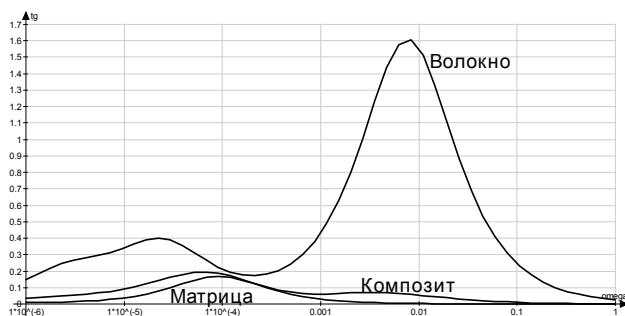


Рис.5. Зависимость тангенсов угла потерь компоненты C_{1111} от частоты ω (Гц).

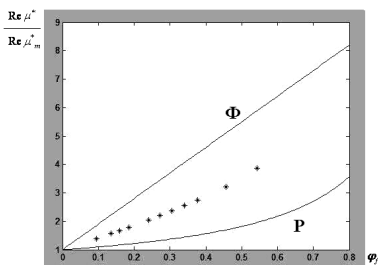


Рис. 6. Зависимость $\text{Re } \mu^*$ от коэффициента армирования для, рассчитанная по методу Фойгта (Ф)-Рейсса (Р) и методом МАО (точки).

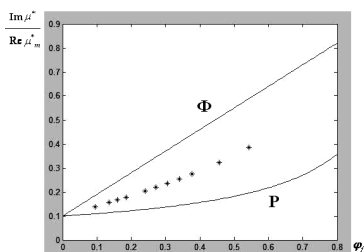


Рис.7. Зависимость $\text{Im } \mu^*$ от коэффициента армирования, рассчитанная по методу Фойгта (Ф)-Рейсса (Р) и методом МАО (точки).

Список литературы

1. Ю.И. Димитриенко. Механика композиционных материалов при высоких температурах. -М.: Машиностроение, 1997. -367 с.
2. Ю.И. Димитриенко, А.И. Кашикаров. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки.- 2002. №.2. - С. 95-108.
3. Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки.- 2008. №.2. - С. 57-67.
4. Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов. Об упругих свойствах композиционных материалов // Математическое моделирование.- 2009. - Т. 21, №. 4. - С. 96-110.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С МНОГОУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов, А.Н. Дроголюб
Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Разработка современных и перспективных материалов невозможна без применения методов математического и компьютерного моделирования, которые позволяют значительно сократить затраты на поиск и выбор наиболее рациональных рецептур и технологий создания материалов. В работах [1-4] были разработаны вычислительные технологии для моделирования

характеристик композиционных материалов, исходя из свойств составляющих элементов композита и его внутренней геометрической структуры (морфологии). В настоящей статье изложены дальнейшие результаты работ по развитию этих технологий применительно к расчету прочностных характеристик композиционных материалов (КМ).

Расчет прочности КМ состоит из 7-ми основных этапов.

1) Решение серии локальных задач L_{pq} теории упругости на 1/8 ячейке периодичности композита $\tilde{V}_{\xi}$,

$$\begin{cases} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha} = 0, & \text{в } \tilde{V}_{\xi}, & \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} = C_{ijkl}^{(\alpha)} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha}, & \text{в } \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^{\alpha} + U_{j(pq)/i}^{\alpha}), & \text{в } \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ U_{i(pq)}^{\alpha} = U_{i(pq)}^N, & \xi^l \in \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}, & (\sigma_{ij(pq)}^{\alpha} - \sigma_{ij(pq)}^N) n_j = 0, & \xi^l \in \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ - поверхности контакта компонентов композита, $\Sigma_s = \{\xi_s : \xi_s = 0\}$ - координатные плоскости, $\Sigma'_s = \{\xi_s : \xi_s = 1/2\}$, $s = 1, 2, 3$ - торцовые поверхности. $U_{i(pq)}^{\alpha}(\xi_i)$, $\sigma_{ij(pq)}^{\alpha}$, $\varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha}$, C_{ijkl}^{α} , $U_{j(pq)/i}^{\alpha}$ - перемещения, напряжения, деформации, тензоры модулей упругости и производные по локальным координатам в компонентах композита $V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1, \dots, N$; ξ_s - локальные координаты. Функции $U_{i(pq)}^{\alpha}(\xi_i)$ удовлетворяют следующим граничным условиям на Σ'_s :

при $p = q$

$$U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, U_{j(pq)/i}^{\alpha} = 0, U_{k(pq)/i}^{\alpha} = 0, \xi^l \in \Sigma'_i, i \neq j \neq k \neq i; \quad (2)$$

при $p \neq q$

$$U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, U_{j(pq)/j}^{\alpha} = 0, U_{k(pq)}^{\alpha} = 0, \xi^l \in \Sigma'_j, i, j = \{p, q\}; \quad (3)$$

$$U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, U_{j(pq)/k}^{\alpha} = 0, U_{k(pq)}^{\alpha} = 0, \xi^l \in \Sigma'_k, i \neq j \neq k \neq i.$$

где $\bar{\varepsilon}_{pq}$ - средние значения деформации композита (заданы).

Решение задач (1)-(3) ищется с помощью метода конечного элемента.

2) После решения серии задач L_{pq} для всех p, q вычисляются эффективные упругие модули композита по следующим формулам:

$$\bar{C}_{ijpq} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}, \bar{\sigma}_{ij(pq)} = \langle \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi\alpha}} \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} dV, \sigma_{ij}^{\alpha} = \sum_{p,q=1}^3 \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} \quad (4)$$

3) Далее вычисляется тензор эффективных упругих податливостей $\bar{\Pi}_{ijpq} = (\bar{C}_{ijpq})^{-1}$ и по его компонентам - технические константы: $\bar{E}_i = 1 / \bar{\Pi}_{iii}$ -

модули Юнга, $\bar{V}_{ij} = -\bar{\Pi}_{ijj} / \bar{\Pi}_{iii}$ - коэффициенты Пуассона, $\bar{G}_{ij} = \bar{C}_{ijj}$ - модули сдвига (здесь по i, j суммирования нет).

4) Затем вычисляем компоненты тензора концентрации напряжений: $B_{ijkl}(\xi_s) = C_{ijpq}^\alpha(\xi_s) \bar{\Pi}_{pqkl}$, связывающие напряжения в компонентах композита с осредненными напряжениями: $\sigma_{ij}^\alpha = B_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl}$. Это соотношение удобно переписать в матричном виде, введя следующие обозначения для групп индексов: $11 \leftrightarrow 1, 22 \leftrightarrow 2, 33 \leftrightarrow 3, 12 \leftrightarrow 4, 13 \leftrightarrow 5, 23 \leftrightarrow 6$:

$$\sigma_i^\alpha(\xi_s) = B_{ij}(\xi_s) \bar{\sigma}_j, i, j = 1 \dots 6 \quad (5)$$

Широко применяемым на практике способом моделирования прочностных свойств материалов является использование квадратичного критерия прочности Малмейстера-Бу [5,6]. Пусть разрушение в точке ξ_s^* компоненты композита наступает, когда в ней выполняется критерий Малмейстера – Бу:

$$f^{(\alpha)}(\xi_s^*) = S_i^{(\alpha)} \sigma_i^{(\alpha)}(\xi_s^*) + \frac{1}{2} S_{ij}^{(\alpha)} \sigma_i^{(\alpha)}(\xi_s^*) \sigma_j^{(\alpha)}(\xi_s^*) = 1, i, j = 1 \dots 6 \quad (6)$$

где $S_{ij}^{(\alpha)}, S_i^{(\alpha)}$ - матрицы и векторы констант прочности α -й компоненты композита (заданы), они имеют по 9 и 3 независимых компонент соответственно.

Подставляя (5) в (6), получим

$$f^{(\alpha)}(\xi_s^*, t^*) = S_i^{(\alpha)} B_{ij}(\xi_s^*) \bar{\sigma}_j(t^*) + \frac{1}{2} S_{ij}^{(\alpha)} B_{ik}(\xi_s^*) B_{jl}(\xi_s^*) \bar{\sigma}_k(t^*) \bar{\sigma}_l(t^*) = 1, \quad (7)$$

где t^* - момент времени разрушения компоненты композита в точке ξ_s^* .

5) Зададим теперь серию из M законов изменения компонент средних напряжений $\bar{\sigma}_k(t)$ в виде линейной функции от времени нагружения t : $\bar{\sigma}_i^{\{\beta\}}(t) = \bar{\sigma}_i^{\{\beta\}} t$, $\beta = 1 \dots M$. Для каждого β -го элемента серии осуществляется нагружение композита с заданным вектором $\bar{\sigma}_i^{\{\beta\}}$ при изменяющемся t от 0 до t_β^* . Осуществляется итерационное приращение аргумента t и на каждом шаге итерации проверяется выполнение условия $f^{(\alpha)}(\xi_s, t) \leq 1$. Как только при некотором t^* впервые выполняется условие $f^{(\alpha)}(\xi_s^*, t_\beta^*) = 1$, происходит разрушение компонента композита. Полагается, что это разрушение и есть разрушение композита в целом. В результате в численном эксперименте находятся значения ξ_s^*, t_β^* и $\bar{\sigma}_i^{\{\beta\}}(t_\beta^*)$.

6) Будем аппроксимировать поверхность прочности композита с помощью того же квадратичного критерия прочности Малмейстера-Бу, но с заранее неизвестными константами $\bar{S}_i, \bar{S}_{ij}$:

$$\bar{f} = \bar{S}_i \bar{\sigma}_i(t^*) + \frac{1}{2} \bar{S}_{ij} \bar{\sigma}_i(t^*) \bar{\sigma}_j(t^*) = 1, \quad (8)$$

7) Осуществляя далее всю серию из M нагружений с различными значениями $\bar{\sigma}_i^{(\beta)}$ в каждом нагружении, на основе (8) можно составить систему уравнений:

$$\bar{S}_i K_i^{(\beta)} + \frac{1}{2} \bar{S}_{ij} K_{ij}^{(\beta)} = 1, \beta = 1 \dots M \quad (9)$$

где $K_i^{(\beta)} = \bar{\sigma}_i^{(\beta)}(t_\beta^*)$, $K_{ij}^{(\beta)} = \bar{\sigma}_i^{(\beta)}(t_\beta^*) \bar{\sigma}_j^{(\beta)}(t_\beta^*)$ - найденные к данному этапу величины. Полагая $M=12$, систему (9) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно 12 констант $\bar{S}_i, \bar{S}_{ij}$. Решая эту СЛАУ, находим константы прочности композита в целом.

Применялся и другой способ нахождения констант прочности $\bar{S}_i, \bar{S}_{ij}$: с использованием условия наилучшей аппроксимации экспериментально получаемой поверхности прочности композита в 6-мерном пространстве осредненных компонент тензора напряжений $\bar{\sigma}_j$.

Численные расчеты проводились для дисперсно-армированного КМ, структура которого представлена на Рис. 1. Исходные данные: матрица изотропная (алюминиевый сплав) - $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$, пределы прочности при растяжении, сжатии и сдвиге $\sigma_t^{(2)} = 0.2$ ГПа, $\sigma_c^{(1)} = 0.3$ ГПа, $\sigma_s^{(1)} = 0.1$ ГПа; армирующий наполнитель – в виде сферических частиц с константами упругости (карбид кремния) $E = 400$ ГПа, $\nu = 0.2$ и пределами прочности $\sigma_t^{(1)} = 0.4$ ГПа, $\sigma_c^{(1)} = 0.5$ ГПа, $\sigma_s^{(1)} = 0.1$ ГПа. По пределам прочности вычислялись значения констант прочности $S_{ij}^{(\alpha)}, S_i^{(\alpha)}$.

Были получены следующие значения эффективных упругих констант композита: $\bar{E}_1 = 121,61511$ ГПа, $\bar{\nu} = 0,298931$, $\bar{G} = 39,85084$ ГПа. Число конечных элементов, на которые разбивалась ЯП, равно 4773 (результаты двух задач L_{pq} представлены на Рис.1-2).

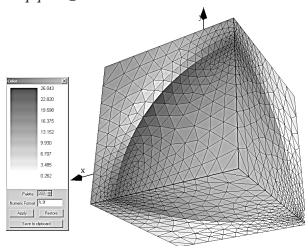


Рис.1. Сдвиговые напряжения, МПа

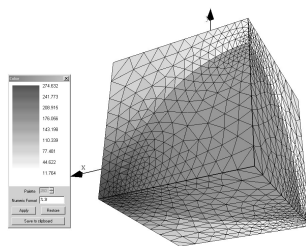


Рис.2. Нормальные напряжения $\sigma_{33(33)}^\alpha$ (МПа) в ЯП

С помощью изложенного выше алгоритма были получены прочностные характеристики исследуемого КМ: $\bar{S}_1 = 35,56$ ГПа $^{-1}$, $\bar{S}_i = 34,68$ ГПа $^{-1}$, $\bar{S}_i = 15,3$ ГПа $^{-1}$

$$\bar{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 790.12346 & -1577.29722 & -1687.99102 & 0 & 0 & 0 \\ -1577.29722 & 867.20867 & -1694.99877 & 0 & 0 & 0 \\ -1687.99102 & -1694.99876 & 1531.10048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42.10526 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42.10526 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

На рис. 3 показаны сечения поверхности прочности матрицы, армирующего наполнителя и композита. Точками показаны «точные» численные значения прочности, а линиями – аппроксимация с помощью критерия Малмейтера-Ву. Получено достаточно хорошее качество аппроксимации.

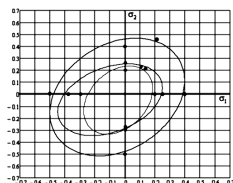


Рис.3. Сечение

аппроксимированных поверхностей прочности компонент композита и самого КМ (ГПа).

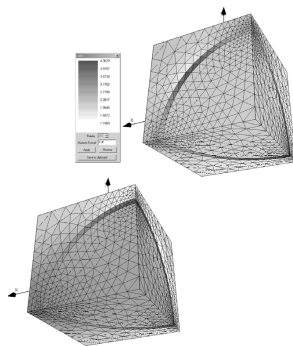


Рис.4. Распределение компонент

тензоров концентрации напряжений V_{1212} и V_{1111} с учетом поверхности раздела.

Выводы

Разработан математический метод и вычислительная технология расчета прочностных характеристик КМ. Показано, что предложенный метод является достаточно эффективным с вычислительной точки зрения, позволяя прогнозировать начальную поверхность прочности композита, используя только одну итерацию решения локальных задач L_{pq} . В то же время, описанный метод нуждается в модификации для поиска предельной поверхности прочности при нагружении до полной потери несущей способности материала.

Список литературы

1. Ю.И. Димитриенко, А.И. Кашиков Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов //Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана, сер. Естественные науки.- 2002.- №2.-С.95-108.
2. Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик

композитов. // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки.-№2. - 2008.- с.57-67.

3. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов* Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Информационные технологии. -2008.- № 8.- С.31-38.

4. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов* Об упругих свойствах композиционных материалов//Математическое моделирование.- 2009.-т.21.- №4.-С.96-110.

5. *А.К. Малмейстер* Сопротивление композитных и полимерных материалов. Рига:«Зинатне», 1980.

6. *Дж. Сендецки* Механика композиционных материалов, т.2».- М.:Мир, 1978.

ТЕЧЕНИЕ В КАПЛЕУЛОВИТЕЛЕ С УЧЕТОМ ОТКЛОНЕНИЯ ПОТОКА КАПЕЛЬ ОТ ОСИ КОНИЧЕСКОЙ ВОРОНКИ

Е.С. Попушина

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

При проектировании новой системы охлаждения космических аппаратов возникает необходимость в разработке специальных устройств, позволяющих осуществлять теплоотвод в условиях открытого космоса. В качестве принципиально нового элемента космической энергетической установки предполагается использовать капельный холодильник-излучатель, основными узлами которого являются генератор капельной пелены и каплеуловитель. С помощью генератора в космосе вследствие вынужденного капиллярного распада осуществляется формирование упорядоченной пелены мелкодисперсных капель горячего теплоносителя. Стационарное движение капельного потока организуется на ограниченном участке в открытом космосе таким образом, чтобы обеспечить заданную теплоотдачу капель за счет излучения. Остывший теплоноситель собирается в каплеуловителе и возвращается в рабочий контур космической энергетической установки. В качестве теплоносителя предполагается использовать специальное вакуумное масло с низким давлением насыщенных паров, поэтому потерями массы хладагента при испарении можно пренебречь.

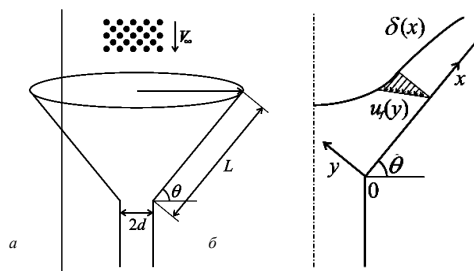


Рис. 1. *a* – схема каплеприемника, *б* – система координат.

Для непрерывной работы всей установки необходимо, чтобы каплеуловитель обеспечивал сбор диспергированного хладагента лишь за счет инерции направленного движения капель в отсутствие силы тяжести. На рис. 1*a* представлена схема каплеуловителя, который состоит из конической воронки (длина образующей L , угол между образующей конуса и плоскостью перпендикулярной оси симметрии θ) и отводящего канала (радиус d).

Для описания течения в пленке вводится неподвижная коническая система координат (рис. 1*б*), положение точки в которой определяется тройкой x^* (расстояние от нижнего края воронки до проекции точки на поверхность каплеуловителя), y^* (расстояние до поверхности каплеуловителя) и φ (угол между начальным и текущим направлением в плоскости, перпендикулярной к оси каплеуловителя). Считается, что капли – идентичные по физическим свойствам сферы радиуса σ и массы m . Скорость потока капель на входе в каплеуловитель постоянна и равна V_∞ , температура капель – T_∞ , хаотическое движение капель отсутствует, объемная концентрация капель τ_∞ постоянна и задана. Предполагается, что на внутренней поверхности воронки каплеуловителя формируется движущаяся жидкая пленка толщиной $\delta^*(x^*)$. Течение пленки считается ламинарным и описывается уравнениями несжимаемой вязкой жидкости с переменной (зависящей от температуры) вязкостью, теплопроводность вещества пленки постоянна. Рассматривается предельный случай, когда потоки массы и импульса осаждающихся капель полностью передаются жидкой пленке. При этом пренебрегается вторичными каплями, которые могут образовываться при столкновении осаждающихся капель с поверхностью пленки. Кроме того, игнорируются процессы испарения и теплообмена за счет излучения на внешней границе пленки.

На неизвестной внешней границе пленки должны быть выполнены условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии.

Безразмерные переменные введены следующим образом:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad \xi = \frac{y^*}{L\varepsilon^{1/2}}, \quad u_f = \frac{u_f^*}{U}, \quad v_f = \frac{v_f^*}{U\varepsilon^{1/2}}, \quad w_f = \frac{w_f^*}{U}, \quad (1)$$

$$p_f = \frac{p_f^*}{\rho_s V_\infty^2}, T_f = \frac{T_f^* - T_w^*}{T_\infty^* - T_w^*}, \mu_f = \frac{\mu_f^*}{\mu_w^*}, \varepsilon = \frac{\mu_w^*}{\rho_f V_\infty L} = \frac{1}{\text{Re}_f},$$

где $\mu_f = [(T_f^* - 273)/(T_w^* - 273)]^{-2.303}$ – приближенная формула зависимости вязкости от температуры для масла ВМ–4, аппроксимирующая табличные данные [1]; U – характерная скорость течения в пленке, u_f, v_f, w_f, p_f и T_f – компоненты вектора скорости, давление и температура жидкости в пленке; $\rho_s = \rho_f \tau_\infty$, ρ_f – плотность вещества капель.

Для рассматриваемых условий обтекания каплеприемника $\varepsilon \ll 1$. Подстановка (1) в уравнения Навье–Стокса, записанные в выбранной криволинейной системе координат, и пренебрежение малыми по ε членами приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_f r)}{\partial x} + \frac{\partial(v_f r)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_f}{\partial \varphi} &= 0, \\ k \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial \xi} + \frac{w_f}{r} \frac{\partial u_f}{\partial \varphi} - \frac{w_f^2 \cos \theta}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu_f \frac{\partial u_f}{\partial \xi} \right), \\ k \frac{w_f^2 \sin \theta}{r} &= - \frac{\partial p_f}{\partial \xi}, \\ k \left(u_f \frac{\partial w_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial w_f}{\partial \xi} + \frac{w_f}{r} \frac{\partial w_f}{\partial \varphi} + \frac{w_f u_f \cos \theta}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu_f \frac{\partial w_f}{\partial \xi} \right), \\ k \left(u_f \frac{\partial T_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial T_f}{\partial \xi} + \frac{w_f}{r} \frac{\partial T_f}{\partial \varphi} \right) &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T_f}{\partial \xi^2} + \text{Ec} \mu_f k^2 \left[\left(\frac{\partial u_f}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_f}{\partial \xi} \right)^2 \right], \\ \text{Pr} &= \frac{c_f \mu_w^*}{\lambda_f}, \text{Ec} = \frac{V_\infty^2}{c_f (T_\infty^* - T_w^*)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r = d + x \cos \theta$. При выводе уравнений (2) считалось, что числа Прандтля Pr и Эккерта Ec имеют порядок единицы. Параметр $k = \text{Re}_f^{1/2} \tau_\infty$ определяет характерную скорость течения в пленке, так как из условия баланса массы в пленке с учетом того, что толщина пленки $\delta_0^* \sim L \varepsilon^{1/2}$ и $v_s^* \sim V_\infty$, масштаб U есть $V_\infty k$. Для типичных условий работы каплеприемника могут иметь место случаи $k \sim O(1)$ и $k \ll O(1)$.

Условие прилипания при $\xi = 0$ имеет вид: $u_f = v_f = w_f = 0$. Температура стенки T_f^* фиксирована, что в безразмерном виде соответствует $T_f = 0$. На внешней границе пленки при $\xi = \delta(x)$ из условий непрерывности потоков массы, импульса и энергии имеем:

$$v_f - u_f \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{w_f}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} = v_s, \quad u_s v_s = k v_s u_f - \mu_f \frac{\partial u_f}{\partial \xi}, \quad (4)$$

$$p = v_s^2, \quad w_s v_s = k v_s w_f - \mu_f \frac{\partial w_f}{\partial \xi},$$

$$k v_s \left(\frac{1 - k^2 (u_f^2 + w_f^2)}{2} + \frac{1 - T_f}{\text{Ec}} \right) + k^2 \mu_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial \xi} + w_f \frac{\partial w_f}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\text{Pr Ec}} \frac{\partial T_f}{\partial \xi} = 0,$$

здесь u_s, v_s, w_s – компоненты вектора скорости капель на входе в каплеуловитель, которые в случае отклонения потока капель хладагента от направления, параллельного оси каплеуловителя на угол γ , задаются формулами

$$u_s = -\sin \gamma \cos \varphi \cos \theta - \sin \theta \cos \gamma,$$

$$v_s = \sin \gamma \cos \varphi \sin \theta - \cos \theta \cos \gamma, \quad w_s = \sin \gamma \sin \varphi.$$

В случае $k \sim O(1)$ требуется еще задание граничного условия при $x = 1$. Это условие можно задать в виде: $\delta = \delta_0, \quad v_f = 0, \quad u_f = -C\xi, \quad w_f = 0, \quad T_f = 0$, $C = \cos \theta \sin \theta$ – заданная положительная константа. Данное условие соответствует случаю осаждения капель на уже существующую пленку, формируемую с использованием щелевого массоподвода при $x = 1$.

Полученная система уравнений при $k = 0$ существенно упрощается. Течение в пленке в этом случае изотермическое, компоненты скорости имеют вид

$$u_f = -u_s v_s \xi, \quad w_f = -w_s v_s \xi, \quad v_f = \frac{\xi^2}{2r} \left(\frac{\partial (w_s v_s)}{\partial \varphi} + u_s v_s \cos \theta \right).$$

Форма поверхности задается уравнением в частных производных, которое методом характеристик может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_s v_s r (\delta^2)'_x + w_s v_s (\delta^2)'_\varphi = 2r v_s - \delta^2 \left(\frac{\partial (w_s v_s)}{\partial \varphi} + u_s v_s \cos \theta \right)$$

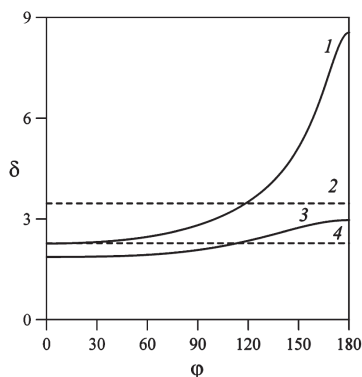


Рис. 2. Толщина пленки в горловине воронки ($x = 0$) в зависимости от угла φ . Кривые 1 и 2 – $k = 0.5$, 3 и 4 – $k = 0$; 1 и 3 – $\gamma = 10^\circ$, 2 и 4 – $\gamma = 0^\circ$.

При $k \sim O(1)$ решение задачи находилось численно с помощью неявной конечно-разностной схемы, имеющей первый порядок аппроксимации по продольной координате и второй порядок по поперечной координате [2]. Сначала находилось решение в плоскости растекания ($\varphi = 0^\circ$), от которой счет шел до плоскости стекания ($\varphi = 180^\circ$). Было проведено параметрическое исследование профилей скорости и температуры. На рис. 2 показана зависимость толщины пленки от угла φ при следующих значениях безразмерных параметров: число Прандтля $Pr = 1720$, число Эккерта $Ec = 0.0004$ (температура капель $T_\infty^* = 343$ К, температура стенки $T_w^* = 303$ К), параметр $k = 0.5$, безразмерный радиус горловины воронки $d = 0.2$, угол наклона образующей конуса $\theta = 60^\circ$, начальная толщина пленки $\delta_0 = 1$; угол отклонения потока капель $\gamma = 10^\circ$ и $\gamma = 0^\circ$). Видно, что в плоскости стекания толщина пленки существенно возрастает.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (N0. 08-01-00195).

Список литературы

1. *Варгафтик Б.Н.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 721 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОСТОЙКОСТИ ОКОШЕК ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ

Е.С. Чувашева, С.Н. Чувашев, И.Г. Зорина

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В последнее время значительные усилия прикладываются к освоению гиперзвуковых скоростей движения в атмосфере. Одной из существенных проблем создания гиперзвуковых летательных аппаратов является аэродинамический нагрев иллюминаторов. При поверхностном нагреве возможно возникновение значительных градиентов температуры и неравномерное тепловое расширение, которое может вызывать большие термические напряжения. Это в принципе может приводить к разрушению этих хрупких защитных элементов. Кроме того, на обращенной к потоку поверхности может происходить нагрев до недопустимо высоких температур. Отказ этих элементов может быть связан с потерей формы и прочности, а также с нарушением прозрачности. В связи с этим проведены расчётно-теоретические исследования нестационарных полей температуры, температурных деформаций и возникающих при этом напряженных состояний прозрачных материалов иллюминаторов.

В качестве вариантов материалов рассматривались сапфир и кварц.

Если края диэлектрической пластины, формирующей окно иллюминатора, закрыты от тепловых потоков аэродинамического нагрева (например, фланцами) и потому прогреваются до меньших температур, то там могут возникать высокие растягивающие напряжения. С учётом деформации в окнах со свободными концами (с возможностью расширения и поворота) напряжения растяжения и сжатия определяются из соотношения вида [1]:

$$\sigma_x(y) = -\alpha T(y)E + \frac{1}{Y} \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} \alpha T(y)E dy + \frac{12y}{Y^2} \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} \alpha T(y)E y dy.$$

Здесь $y = -\frac{Y}{2} \dots \frac{Y}{2}$ – координата по поверхности окна.

Проведённых в соответствии с этим расчёты распределения напряжений из различных материалов показали, что, например, в сапфире при симметричном температурном профиле на периферии возникают очень большие растягивающие напряжения, которые даже при умеренных ΔT порядка 100 К превышают напряжения разрушения для ряда образцов сапфира. Для кварца прочность при этих условиях не нарушается из-за значительно меньших значений α и σ_x .

Для определения распределения температуры по толщине окна решалось уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \{ \rho c_p [T(y,t)] T(y,t) \}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda [T(y,t)] \frac{\partial T(y,t)}{\partial y} \right],$$

здесь ρ – плотность, $c_p [T(y,t)]$ – теплоёмкость, $\lambda [T(y,t)]$ – коэффициент теплопроводности, решается с начальными условиями $T(y,0) = T_0$, граничным условием на левой границе $y = 0$

$$q_a(t) - \sigma_{SB} [T(0,t)]^4 = -\lambda [T(0,t)] \frac{\partial [T(0,t)]}{\partial y},$$

здесь $q_a(t)$ – тепловой поток от аэродинамического нагрева, σ_{SB} – постоянная Стефана-Больцмана, граничным условием на правой границе $y = Y$

$$-\lambda [T(0,t)] \frac{\partial [T(Y,t)]}{\partial y} = \sigma_{SB} [T(Y,t)]^4 - \sigma_{SB} T_i^4.$$

Здесь T_i – температура внутренних частей летательного аппарата, на которые попадает излучение от окошка. По полученному полю температуры $T(y,t)$ для интересующих моментов времени с учётом деформации пластины вычислялись температурные напряжения [2]:

$$\sigma_x = -\frac{\alpha [T(Y,t)] T(Y,t) E}{1-\nu} + \frac{1}{Y(1-\nu)} \int_0^Y \alpha [T(y,t)] T(y,t) E dy + \\ + \frac{12y}{Y^2(1-\nu)} \int_0^Y \alpha [T(y,t)] T(y,t) E y dy$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона. Характеристики для указанных материалов с учётом их температурных зависимостей брались из [3], [4].

Характерные результаты вычислений для полёта по квазипериодической траектории представлены на рисунках 1-3.

На временных зависимостях видны максимумы, связанные с вхождением ГЛА в нижние слои атмосферы, и точки перегиба, связанные с проходом через место расположения данного окна зоны ламинарно-турбулентного перехода. Из расчётов следует, что в этом случае в сапфире для многих образцов превышает порог прочности (порядка 10^8 Па на растяжение), т.е. возможно хрупкое разрушение. Любопытно, что область наибольших растягивающих напряжений находится в глубине материала окна. Кварцевое окно не испытывает разрушающих напряжений, но перегревается выше порога размягчения (около 1400 К), т.е. возможны вязкие деформации внешней поверхности. Это происходит при снижении ГЛА в ходе полёта по периодической траектории.

Следует отметить некоторую условность пороговых значений напряжения разрушения сапфира и температуры размягчения кварца: эти величины различны для различных сортов материала и даже образцов окон, а процессы разрушения зависят от некоторых других величин (внешнее давление, вибрации...). В целом можно заключить, что в данном режиме установка окна при указанных условиях без организации охлаждения рискованна.

Т.о., при проектировании иллюминаторов таких летательных аппаратов следует учитывать термпрочность прозрачных материалов.

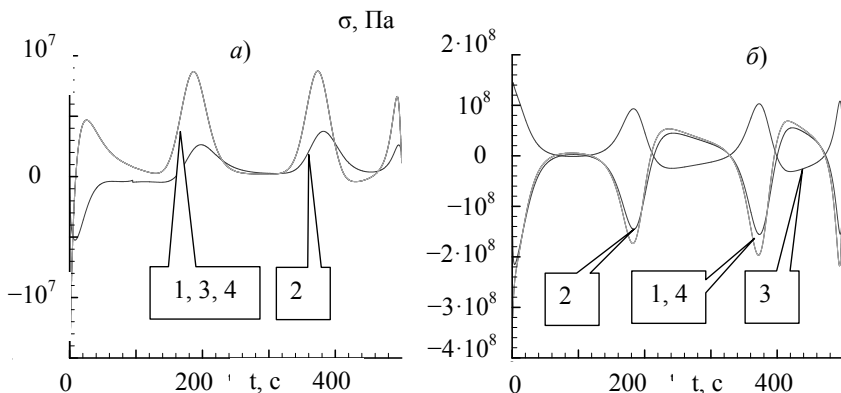


Рис.1. Временные зависимости напряжений в кварцевом (а) и сапфировом (б) окне: на внешней (1) и внутренней (2) поверхностях, в точках достижения максимальных напряжений растяжения (3) и сжатия (4)

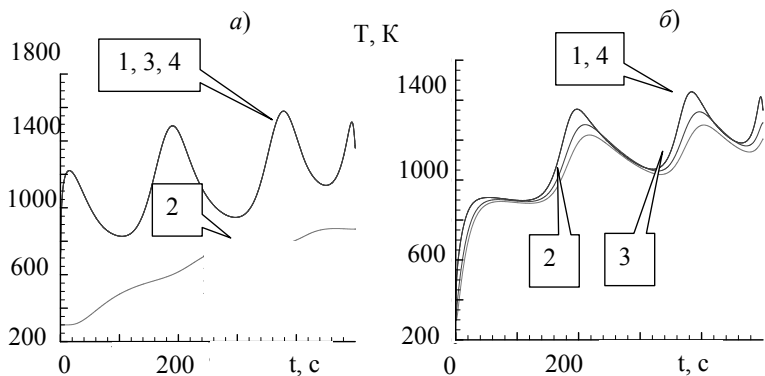


Рис. 2. Временные зависимости температуры в кварцевом (а) и сапфировом (б) окне на внешней (1) и внутренней (2) поверхностях, в точках достижения максимальных напряжений растяжения (3) и сжатия (4)

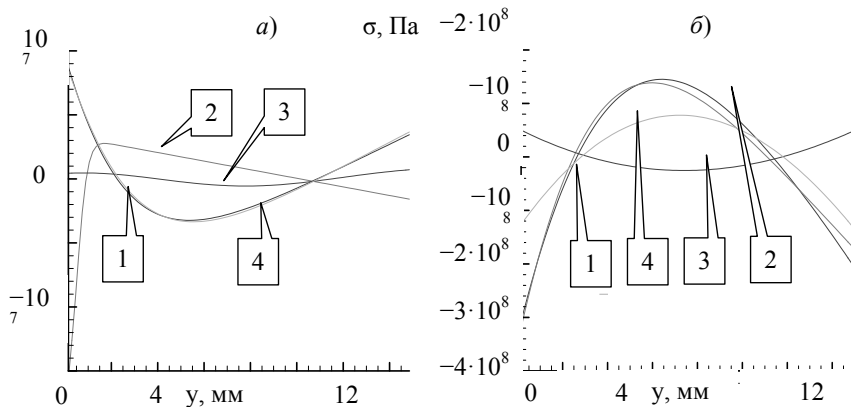


Рис.3. Пространственные зависимости напряжений в кварцевом (а) и сапфировом (б) окне: в моменты достижения максимальных напряжений (1), достижения минимальных напряжений (2), середины полёта (3) и достижения максимальных температур (4).

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975
2. Rice R. W. Mechanical properties of ceramics and composites: grain and particle effects.. – NY:Marcel Dekker Inc., 2000, 695 pp.
3. Физические величины. Справочник /Под ред. И.С.Григорьева и Е.З.Мейлихова. М.: Энергоатомиздат. 1991.– 1232 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОЛЁТА НЕУПРАВЛЯЕМОЙ РАКЕТЫ

Е.С.Чувашева, Н.И. Якимов, С.Н. Чувашев
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Неуправляемые малоразмерные (диаметр 50...80 мм, длина около 0,5 м) ракеты применяются, например, при метеорологических исследованиях. При отработке новой ракетной системы целесообразно проводить теоретическое сопровождение, которое, как правило, позволяет резко сократить программу экспериментальных работ и повышает эффективность разработки, указывая на внутренние механизмы и подсказывая способы решения проблем. В частности, у данной ракетной системы одна из основных проблем – это стабильность полёта при различных возмущающих факторах (в т.ч. начального перекося, изменения начальной температуры, бокового ветра, отклонения вектора тяги от оси и др.). Для этого разработана математическая модель и реализована программа расчета движения для различных вариантов исполнения и характерных условий полетов.

Динамика полёта ракеты рассчитывалась по общим дифференциальным уравнениям динамики сложного нестационарного пространственного движения трехмерного тела, приведенным в [1]:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right) &= R_x + G_x, & m \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right) &= R_y + G_y, \\ m \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right) &= R_z + G_z, \\ G_x &= -mg \sin \theta, & G_y &= -mg \cos \theta \cos \gamma, & G_z &= mg \cos \theta \sin \gamma, \\ v_x &= v \cos \alpha \cos \beta, & v_y &= -v \sin \alpha \cos \beta, & v_z &= v \sin \beta, \\ R_x &= -F_x + P \cos \varphi_P, & R_y &= F_y + P \sin \varphi_P, & R_z &= F_z, & F_t &= c_t A_t \rho v^2, & t &= x, y, z, \\ I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_{R_{xx}}, & I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_{R_{yy}}, \\ I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_{R_{zz}}, \end{aligned}$$

m – масса, t – время, x, y, z – координаты, связанные с ракетой и направленные по ее главным осям инерции, индексы обозначают проекции на соответствующие оси, v – скорость, ω – угловая скорость, F – сила аэродинамического сопротивления, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность воздуха, A – площадь проекции, c – коэффициент аэродинамического сопротивления, φ_P – угол заклинивания двигателя, P – сила тяги, M_R – вращательные моменты, I – моменты инерции, α – угол атаки, β – угол скольжения, θ – угол тангажа, γ – угол крена, ψ – угол рыскания. Явно

учитывались экспериментальные зависимости тяги P от времени; применялись также реальные моменты инерции. Коэффициенты аэродинамических сил c оценивались по данным [2] для c_x подобной ракеты, для $c_y = c_z$ – для обдуваемого цилиндра по [3] для корпуса и для плоских пластин по [3] для стабилизатора. Зависимость скорости горения от начальной температуры заряда учитывалась по данным для черного пороха для температур от -30 С до $+44$ С, приведенным в [4].

Зависимость массы топлива от времени находилась из соотношений:

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = -m'(t), \quad M(0) = M_0, P(t) = v_g m'(t), \int_0^{\infty} P(t) dt = M_0 v_g,$$

где v_g – скорость продуктов сгорания, выходящих из сопла, M_0 – начальная, $M(t)$ – текущая масса заряда, $m'(t)$ – расход массы, $P(t)$ – временная зависимость тяги, интегрирование по всему времени полета. Пропорционально степени выгорания заряда менялись моменты инерции и положение центра масс.

Учитывалась принципиальная возможность задания таких возмущающих факторов, как боковой ветер (по направлению нормали к вертикальной плоскости, содержащей вектор начальной скорости ракеты), действующий на ракету в заданной полосе высот, в т.ч. до высот 500...1000 м, различные значения начальной температуры и давления, а также ненулевой угол между осью симметрии и вектором тяги.

При программной реализации модели применялся язык С в версии C++ Microsoft Visual Studio Express Edition 2008.

Угол старта был постоянным и составлял 45° к горизонту.

Проводились вычисления как для невозмущенного полета, так и с учетом возмущающих факторов.

В ряде расчетов на высоте от 300 до 500 м задавался боковой ветер 15 м/с. В некоторых расчётах, однако, такой ветер задавался на высотах от 5 до 200 м. Метеорологические условия в большей части расчетов задавались соответствующими 1 атм и 0 С. Проводились также расчеты при 1 атм и $+40$ С и при 1 атм и -40 С.

Характерные результаты показаны на рисунках 1 и 2. Анализ проведенных массовых расчетов показывает следующее.

При отсутствии возмущающих факторов полет проходит по почти параболической траектории. Скорость нарастает в течение времени работы двигателя и затем плавно снижается из-за сопротивления воздуха. Наблюдаются небольшие угловые колебания оси ракеты в вертикальной плоскости. Изменение углов крена и рыскания отсутствовало.

Для ракет при ветре на высотах 300...500 м расстояние полёта таково, что когда они входили в полосу ветра, они двигались с выключенным двигателем. Скорость бокового ветра соответствует относительно небольшому углу поворота набегающего на ракету потока воздуха. Кроме того, достаточно эффективна аэродинамическая стабилизация с помощью оперения. Ракеты

сносятся в этом случае по направлению ветра. Влияние ветра наиболее заметно по появлению при входе и выходе из ветровой полосы угловых колебаний в плоскости действия ветровой нагрузки, а также увеличению колебаний в других направлениях. На скорость и перемещение центра масс воздействия почти не происходит, т.к. ракета движется по инерции. В результате ошибка, вносимая таким ветром, невелика – порядка нескольких метров.

Однако при действии ветра начиная практически со старта (5...200 м), когда работает двигатель, эффект значительно больший. Скорость ракеты еще невелика, и ветер соответствует значительному повороту набегающего потока. Ракету также немного сносит по ветру, но главное, за счет взаимодействия косого потока набегающего воздуха с оперением разворачивает против ветра, поворачивая вектор тяги двигателя на значительные углы. В результате ракета с самого начала полета сбивается с заданного курса и улетает в сторону против ветра на расстояния порядка десятков-сотен метров.

Влияние температуры на полет ракеты двояко. Во-первых, при её повышении немного – на проценты – ускоряется горение заряда в двигателе, и тот же импульс приобретается ракетой за несколько меньшее время. Влияние этого на траекторию, впрочем, незначительно. Правда, следует отметить, что использовались данные для черного пороха, для других зарядов этот эффект может быть значительнее. Другой эффект – снижение плотности атмосферы при высоких температурах и соответствующее снижение аэродинамического сопротивления – более заметен. В результате траектория при изменении температуры на десятки градусов смещается на несколько метров: при больших температурах ракета летит чуть дальше.

Большие ошибки могут возникать вследствие наличия ненулевого угла между осью симметрии ракеты и вектором тяги. Уже почти незаметные углы – порядка 0.1° – приводят к тому, что ракета улетает в сторону далеко – на несколько сотен метров. Как и в случае с ветром на активном участке траектории, ракета сбивается с курса и летит в другом направлении, с каждой секундой увеличивая промах.

Рассмотрим возможности стабилизации полета и рекомендации по достижению этого.

Температурный фактор можно легко учесть, зная температуру среды.

На пассивном участке полета достаточными представляются имеющиеся стабилизаторы в виде хвостового оперения. Если возмущающие факторы начинают действовать после выключения двигателя, то промахи, как правило, невелики.

Наибольшую опасность представляют возмущения на начальном, активном участке полета. К этим возмущениям относится и ветер, и ненулевой угол между вектором тяги и осью симметрии ракеты, и толчки при сходе с направляющих.

Стабилизирующая способность оперения, пропорциональная скоростному напору, при малых начальных скоростях еще мала. Поэтому возможны заметные повороты ракеты вокруг центра масс. А при работающем двигателе это означает поворот вектора тяги, а следовательно и ускорения, и

скорости центра масс. В результате ракета летит под углом к заданной траектории, постоянно удаляясь от нее. Для стабилизации в этих случаях наиболее эффективной представляется организация вращения ракеты вокруг своей оси, достаточно быстрого для проявления гироскопического эффекта, причем уже на самых первых метрах полёта.

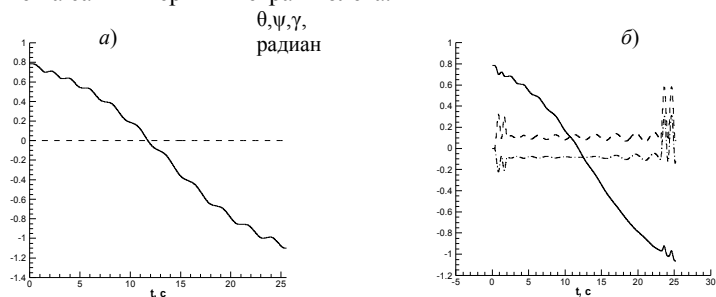


Рис. 1. Временные зависимости угла тангажа (сплошная кривая), рыскания (штриховая) и крена (штрих-пунктирная):
а) без ветра, б) с поперечным ветром 15 м/с на высоте 5-200 м

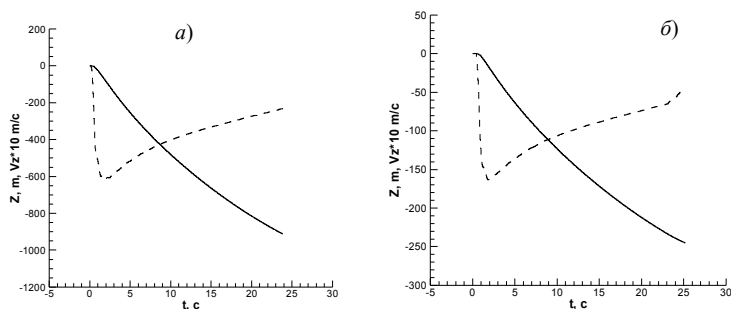


Рис. 2. Временные зависимости поперечного смещения (сплошная кривая, м) и поперечной скорости (штриховая, 0.1 м/с):
а) с поперечным ветром 15 м/с на высоте 5-200 м;
б) без ветра, угол оси симметрии и вектора тяги 0.1°

Список литературы

- Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. – М.: Машиностроение. 1983. 320 с.
- Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets /MIL-HDBK-762(MI). – NY: DoD, 1990. –716 pp.

7. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.

8. Бахман Н.Н., Беляев А.Ф. Горение гетерогенных конденсированных систем. – М.: Наука, 1967. – 121 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОЙ РАЗВЕРТКИ ФАЗЫ В КОСМИЧЕСКОЙ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Р. И. Шувалов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Большое прикладное значение имеет метод построения цифровых моделей рельефа (ЦМР) поверхности Земли по данным интерферометрической съемки из космоса радиолокатором с синтезированной апертурой антенны (РСА). Это связано с возможностью получать радиолокационные изображения независимо от времени суток и погодных условий; с оперативностью получения ЦМР на интересующий район; с высокой потенциальной точностью метода. Интерферометрический метод измерений основан на использовании эффекта интерференции волн и состоит в сравнении мало отличающихся друг от друга волновых фронтов [1]. Интерферометрический метод построения ЦМР по данным РСА заключается в проведении двух космических радиолокационных съемок интересующего участка поверхности Земли с незначительно различающимися углами наблюдения, формировании топографической интерферограммы по результатам совместной обработки полученных снимков, и извлечения из сформированной интерферограммы топографической информации [2], [3], [4], [5], [6]. Метод аналогичен известному в экспериментальной механике методу смещенного источника [1].

Топографическая интерферограмма представляет собой матрицу главных (то есть, известных по модулю 2π радиан) значений разностей фаз. Для извлечения из такой интерферограммы информации о рельефе необходимо преобразовать ее в матрицу абсолютных значений фазовых разностей. Задача восстановления массива абсолютных фазовых значений по массиву главных значений фазы называется задачей развертки фазы. Развертка фазы является наиболее сложным этапом интерферометрической технологии [6], [7], [8], [9], поскольку на получаемых интерферограммах практически всегда присутствуют разрывы. По определению абсолютная фаза терпит разрыв на паре смежных пикселей интерферограммы, если разность её значений на этой паре пикселей, превышает по модулю π радиан. Причиной появления разрывов фазы могут являться особенности рельефа подстилающей поверхности и геометрии съемки, действие фазового шума. Для каждого разрыва фазы имеется неопределенность его величины и положения. Неопределенность в положении разрывов фазы на интерферограмме означает неопределенность решения задачи развертки фазы.

Для установления величины и местоположения имеющихся разрывов необходима дополнительная информация. В настоящей работе развертка фазы рассматривается в контексте топографической РСА интерферометрии. Дополнительная информация здесь включает в себя интенсивность принятого сигнала на двух снимках, когерентность между двумя снимками, и априорную информацию о рельефе подстилающей поверхности. Наблюдаемые значения интерферометрической фазы, когерентности и интенсивности зависят от большого числа факторов, в том числе от случайных факторов (шумы) и от факторов, не поддающихся априорному учету (атмосферные эффекты). Таким образом, доступная дополнительная информация не относится к искомому решению непосредственно, а некоторым сложным образом связана с ним, и эта связь не поддается точному теоретическому описанию. Поэтому возникает необходимость в ее математической модели. Математическая модель представляет собой систему математических соотношений, описывающих связи между интерферограммой, имеющейся дополнительной исходной информацией, и искомым решением задачи развертки фазы. При математическом моделировании используется аппарат теории вероятностей и математической статистики. Наблюдаемые значения трактуются как реализации случайных величин с известными законами распределения. Особенностью рассматриваемого случая, является то, что для каждой случайной величины доступна всего одна реализация.

В настоящей работе, в рамках принятой математической модели, строится распределение вероятностей локального наклона фазового рельефа на топографической интерферограмме. Основной составляющей этого распределения является функция правдоподобия локального наклона так называемого физического фазового рельефа (т.е. фазового рельефа не искаженного фазовым шумом), объединяющая несколько независимых наблюдений. Распределение строится для каждой точки интерферограммы независимо от всех остальных точек и формируется совместное распределение вероятностей наклонов фазового рельефа интерферограммы. Такое совместное распределение индуцирует распределение вероятностей на множестве всех допустимых систем разрывов фазы. Общий метод выяснения положения системы разрывов заключается в построении распределения вероятностей на множестве всех допустимых систем и поиске его максимума [8]. Практическая реализация этого метода, как правило, сопряжена с большой вычислительной сложностью, связанной с большим объемом исходных данных и видом целевого функционала.

Постановка задачи развертки фазы может быть элегантно сформулирована в терминах теории транспортных сетей [10]. Задана транспортная сеть, представляющая собой конечную целочисленную решетку относительно прямоугольной декартовой системы координат на евклидовой плоскости, с известным положением источников и стоков. Даны результаты измерений (данные наблюдений) в которых неявно содержится информация (возможно не полная) о сетевом потоке. Требуется восстановить неизвестный сетевой поток. Для решения этой задачи сначала строятся функции стоимости

для дуг сети на основе анализа результатов измерений и привлечения дополнительной информации. Затем ставится и решается задача поиска потока минимальной стоимости. Найденный поток минимальной стоимости принимается за искомый поток [9], [10]. Функция стоимости протекания потока для каждой дуги транспортной сети математически строго строится на основе распределения вероятностей локального наклона фазового рельефа [8].

Модели позволяющие вычислять вероятности разрывов фазы в различных точках интерферограммы, лишь частично описаны в литературе, несмотря на их большую практическую значимость. В работе [8] по интерферограмме и когерентности моделируется фазовый шум, и вычисляются вероятности обусловленных им разрывов. При этом интенсивность сигнала ни как не учитывается, а априорное распределение вероятностей локального наклона физического фазового рельефа предполагается равномерным. Предполагается, что разрывы фазы не шумовой природы отсутствуют. Модель, предложенная в работе [9], учитывает интенсивность и когерентность. Интенсивность считается детерминированным параметром. Для распределения вероятностей наблюдаемого локального наклона фазового рельефа используется аппроксимация усеченным гауссовым распределением, справедливая лишь в области высокой когерентности. Априорное распределение вероятностей локального наклона физического фазового рельефа не учитывается.

В настоящей работе построено распределение вероятностей локального наклона фазового рельефа, которое обобщает модель работы [8] по трем направлениям: учет физических разрывов фазы (т.е. разрывов, обусловленных топографией и геометрией съемки), учет интенсивности принятого радиолокационного сигнала [11], учет априорного распределения вероятностей топографического градиента. На основе построенного распределения получены нелинейные функции стоимости. Проведен вычислительный эксперимент с реальными радиолокационными снимками, подтвердивший практическую ценность полученных в работе результатов.

Список литературы

1. А.Г. Козачок. Голографические методы исследования в экспериментальной механике. – М.: Машиностроение, 1984.
2. L.C. Graham. Synthetic interferometric radar for topographic mapping. // Proceedings of the IEEE, vol. 62, pp. 763–768, June 1974.
3. H.A. Zebker, R.M. Goldstein. Topographic mapping from interferometric SAR observations. // J. Geophys. Res., vol. 91, pp. 4993–4999, 1986.
4. R. Bamler. Digital Terrain Models from Radar Interferometry. // Photogrammetric week '97, pp. 93–105, Wichmann Verlag, Heidelberg, 1997.
5. P. Rosen, S. Hensley et al. Synthetic Aperture Radar Interferometry. // Proceedings of the IEEE, vol. 88, No. 3, March 2000.

6. И.В. Елизаветин, Р.И. Шувалов, В.А. Буш. Принципы и методы радиолокационной съемки для целей формирования цифровой модели местности. // Геодезия и картография. 2009. №1. С. 39–45.

7. R.M. Goldstein, H.A. Zebker, C.L. Werner. Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping. // Radio Sci., vol. 23, no. 4, pp. 713–720, July/Aug. 1988.

8. G.F. Carballo, P.W. Fieguth. Probabilistic cost functions for network flow phase unwrapping. // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 38(5), pp. 2192–2201, 2000.

9. C.W. Chen. Statistical-cost network-flow approaches to two-dimensional phase unwrapping for radar interferometry. // PhD thesis, Stanford University, 2001.

10. M.A. Costantini. Phase Unwrapping Method Based on Network Programming. // Proceedings of the FRINGE'96 Conference, Zurich, Switzerland, 1996, ESA SP-406.

11. Р.И. Шувалов. Разработка радиометрической модели снимков поверхности Земли, формируемых по данным измерений космических радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны. // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2009. №4. С. 99–118.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЗВУКОВОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ

В.Н. Тимофеев

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Сложность физико-механических процессов отрывного обтекания криволинейных поверхностей создает существенные трудности при математическом моделировании и стимулирует дальнейшее развитие различных концепций и методов, базирующихся на теории как вязкой, так и идеальной среды [1-5]. Согласно концепции вязко-невязкого взаимодействия [5], давление на поверхности тела в потоке вязкой среды, следует получать по данным о невязком обтекании некоторого эквивалентного тела вытеснения. В области пограничного слоя поверхность тела вытеснения отстоит от обтекаемой поверхности на малую толщину вытеснения. Продолжаясь за линию отрыва потока, тело вытеснения моделирует влияние спутного следа.

В первом приближении или при значительной собственной толщине тела можно не производить поправку на толщину вытеснения. В ряде случаев можно отказаться от построения поверхности тела вытеснения, задавая его форму априорно или на основе дополнительной информации [6-7]. Поэтому, методика определения давления при невязком обтекании тела вытеснения не только является важным этапом расчетов отрывных течений в концепции вязко-невязкого взаимодействия, но и может дать приближенное решение задачи.

Для отработки такой методики при умеренных дозвуковых скоростях потока среда считалась несжимаемой и невесомой жидкостью. Предполагалось, что всюду вне поверхности тела вытеснения течение потенциальное и существует потенциал возмущений ϕ . В системе координат, связанной с телом, скорость потока в точке M_0 вычислялась по формуле

$$\bar{V}(M_0) = \bar{V}_\infty + \text{grad}\phi(M_0), \quad (1)$$

где $\bar{V}_\infty$ - вектор скорости набегающего потока.

Для нахождения потенциала скорости ϕ из уравнения неразрывности и граничных условий непротекания поверхности тела вытеснения Σ и затухания возмущений на бесконечности, получалась внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi(M_0) = 0, \\ \left. \frac{\partial\phi(M_0)}{\partial\bar{n}} \right|_\Sigma = -\bar{V}_\infty \cdot \bar{n}(M_0)|_\Sigma, \\ \phi(M_0) \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty, \\ \nabla\phi(M_0) \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (2)$$

где $\bar{n}(M_0)$ - орт вектора внешней нормали к поверхности Σ в точке M_0 .

Задача (2) имеет единственное решение, которое искалось в виде потенциала двойного слоя, размещенного на поверхности тела вытеснения

$$\phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} g(M) d\Sigma,$$

где $\bar{r} = \overline{MM_0}$ - вектор, направленный из точки $M(x, y, z)$, расположенной на элементе площади $d\Sigma$, в точку вычисления скорости $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $r = |\bar{r}|$; $g(M)$ - поверхностная плотность потенциала двойного слоя. Потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа и условию затухания возмущений на бесконечности. Условие непротекания выполняется, если поверхностная плотность $g(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\bar{n}_{M_0}} \int_\Sigma \left(\frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} \right) g(M) d\Sigma = -\bar{V}_\infty \cdot \bar{n}(M_0).$$

Для реализации численного метода поверхность обтекаемого тела вытеснения аппроксимировалась конечным числом панелей - многоугольников Σ_k , $k=1, \dots, N$ с постоянной плотностью потенциала двойного слоя g_k . По аддитивности и линейности двойного интеграла и линейности градиента

$$\bar{V}(M_0) = \bar{V}_\infty + \sum_{k=1}^N g_k \left(\frac{1}{4\pi} \text{grad}_{M_0} \int_{\Sigma_k} \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} d\Sigma \right).$$

Скорость, индуцированная замкнутой вихревой нитью L_k , расположенной по границе $\partial\Sigma_k$ панели Σ_k , и имеющей циркуляцию Γ_k , вычисляется по закону Био-Савара и равна градиенту потенциала двойного слоя, размещенного на Σ_k с постоянной плотностью $g_k = -\Gamma_k$ [8]

$$\frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{L_k} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = -\frac{\Gamma_k}{4\pi} \text{grad}_{M_0} \int_{\Sigma_k} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}(M)}{r^3} d\Sigma$$

После введения в рассмотрение величины, называемой функцией скорости и равной скорости, индуцированной в точке M_0 k -ой вихревой нитью L_k с $\Gamma_k = 1$ (или k -ой панелью Σ_k при $g_k = -1$)

$$\overline{w}_k(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{L_k} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi} \text{grad}_{M_0} \int_{\Sigma_k} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}(M)}{r^3} d\Sigma,$$

скорости в точке M_0 вычислялись по формулам

$$\overline{V}(M_0) = \overline{V}_\infty + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{w}_k(M_0).$$

Это давало возможность применять метод дискретных вихрей [4]. Функция скорости каждого из вихревых многоугольников определялась как сумма функций скорости составляющих его вихревых отрезков [9].

Для определения неизвестных циркуляций Γ_k граничные условия непротекания поверхности тела вытеснения Σ удовлетворялись в контрольных точках C_v , $v = 1, \dots, N$, расположенных в геометрических центрах панелей Σ_k [9]. Так как в контрольных точках нормальные производные потенциала двойного слоя непрерывны, то

$$\frac{\partial \phi(C_v)}{\partial \vec{n}} = (\overline{V}(C_v) - \overline{V}_\infty) \cdot \vec{n}(C_v) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{w}_k(C_v) \cdot \vec{n}(C_v)$$

и граничные условия непротекания принимали вид

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k (\overline{w}_k(C_v) \cdot \vec{n}(C_v)) = -\overline{V}_\infty \cdot \vec{n}(C_v),$$

где $\vec{n}(C_v)$ – орт нормали к панели Σ_k в контрольной точке C_v . Поэтому циркуляции определялись из следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^N a_{vk} \Gamma_k = b_v, v = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $a_{vk} = \overline{w}_k(C_v) \cdot \vec{n}(C_v)$, $b_v = -\overline{V}_\infty \cdot \vec{n}(C_v)$.

В задачах, решаемых методом дискретных вихрей для замкнутых поверхностей Σ , матрица $\|a_{vk}\|$ получается вырожденной, поэтому СЛАУ (3) решалась с использованием регуляризирующей переменной [4,9-10].

После нахождения неизвестных циркуляций Γ_k скорость потока вне поверхности тела вытеснения определялась из соотношения (1). В контрольных

точках C_v на поверхности тела вытеснения скорость, как градиент потенциала двойного слоя, терпит разрыв

$$\overline{\Delta V(C_v)} = \frac{\partial g(C_v)}{\partial \tau_1} \overline{\tau_1(C_v)} + \frac{\partial g(C_v)}{\partial \tau_2} \overline{\tau_2(C_v)},$$

частные производные вычисляются по направлениям двух лежащих в касательной плоскости взаимноортогональных единичных векторов $\overline{\tau_1(C_v)}$ и $\overline{\tau_2(C_v)}$. Учитывая, что $g_v = -\Gamma_v$, эти частные производные определялись интерполяцией по значениям циркуляций V -ого и соседних с ним дискретных вихрей. Скорость в контрольных точках на поверхности тела вытеснения находилась как полученное численно предельное значение градиента потенциала двойного слоя

$$\overline{V}(C_v) = \overline{V}_\infty + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{w_k(C_v)} + \frac{1}{2} \overline{\Delta V(C_v)}.$$

Безразмерные коэффициенты давления $c_p = 2(p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2)$ рассчитывались из интеграла Бернулли по формуле $c_p = 1 - (V/V_\infty)^2$.

По описанной методике был произведен расчет осесимметричного тела под нулевым углом атаки. Длина головной оживальной части составляла d , средней цилиндрической – $2d$ и хвостовой сужающейся конической частей – $0,5d$, где d – диаметр миделевого сечения. Тело вытеснения за донным срезом являлось продолжением конической поверхности хвостовой части с полууглом раскрытия равным 10° .

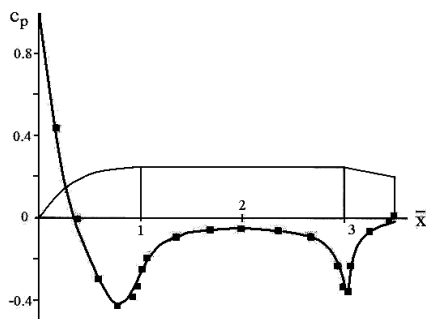


Рис.1. Распределение коэффициента давления C_p по образующей осесимметричного тела

Осуществлялось равномерное разбиение тела вытеснения на 32 части по окружности миделевого сечения, на 35 части по длине обтекаемого тела и на 23 по длине следа, что соответствовало числу панелей $N=1856$. Представленное на рисунке распределение коэффициента давления по образующей обтекаемого тела хорошо согласуется с экспериментальными данными [11] и свидетельствует в возможности применения рассмотренной методики как для определения давления при невязком обтекании тела вытеснения так и при

приближенном решении задачи некоторых задач отрывного дозвукового обтекания тел.

Список литературы

1. Д.Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. М.: Мир, 1990, Т. 1 -384с.; Т. 2 -392с.
2. К. Флетчер. Вычислительные методы в динамике жидкости: В 2-х т. М.: Мир, 1990, Т. 1 -504с.; Т. 2 -520с.
3. О.М.Белоцерковский. Численное моделирование в механике сплошной среды - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994. - 448с.
4. С.М. Белоцерковский, Н.И. Ништ. «Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью - М.Наука.1978.352с.
5. А.В. Гогош, Г.Ю. Степанов. Отрывные и кавитационные течения - М.: Наука, 1990. - 384с.
6. П. Чжен. Отрывные течения: В 3-х т. М.: Мир, 1973, Т. 1 -301с.; Т. 2 - 280с.; Т. 3 -357с.
7. С.И. Девнин. «Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций», Справочник, Л.: Судостроение, 1983. -320с.
8. Л. И. Седов. “Механика сплошной среды”, том 1, 2, Издательство “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1973.
9. И. К. Лифанов. “Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент- М.: ТОО “Янус”, 1995. - 520с.
10. А.В. Дворак. Невырожденность матрицы дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания – Труды ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. – М., 1986, вып. 1313 – с.441-453.
11. F.A. Woodward An Improved Method For The Aerodynamic Analysis Of Wing-Body-Tail Configurations In Subsonic And Supersonic Flow – Washington: - 1973, NASA CR-2228, p.1 – 130 p.

СЕКЦИЯ №4
Функциональный анализ и дифференциальные уравнения
в практических приложениях

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

П. Н. Антонюк

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

1. Введение

Известно, что преобразования Лоренца, рассмотренные в широком смысле как десятипараметрическая неоднородная группа Лоренца или группа Пуанкаре, представляются произведением следующих десяти преобразований. Преобразование

$$x = \frac{x' + \frac{u}{c} \cdot ct'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad ct = \frac{\frac{u}{c} \cdot x' + ct'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

в плоскости (x, ct) и два аналогичных преобразования в плоскостях (y, ct) и (z, ct) , преобразование

$$x = \cos \varphi \cdot x' - \sin \varphi \cdot y', \quad y = \sin \varphi \cdot x' + \cos \varphi \cdot y'$$

в плоскости (x, y) и два аналогичных преобразования в плоскостях (y, z) и (z, x) , а также преобразование

$$x = x' + \alpha$$

на прямой x и три аналогичных преобразования на прямых y, z, ct . Здесь c – скорость света. Все обозначения общеприняты.

Обсуждая эти десять преобразований, будем дальше говорить о преобразованиях Лоренца и группе Лоренца. Именно такую терминологию использовал сам Анри Пуанкаре.

2. Рациональная параметризация преобразований Лоренца

Главный результат этой работы состоит в том, что рассмотренные выше десять преобразований от одной инерциальной системы отсчета к другой, переводящие старые координаты x, y, z, ct события в новые координаты x', y', z', ct' , могут быть записаны при помощи рациональных функций в следующем виде:

$$x = x' + \alpha, \tag{1}$$

$$y = y' + \beta, \tag{2}$$

$$z = z' + \gamma, \tag{3}$$

$$ct = ct' + c\tau, \quad (4)$$

$$x = \frac{1-f^2}{1+f^2} \cdot x' - \frac{2f}{1+f^2} \cdot y', \quad y = \frac{2f}{1+f^2} \cdot x' + \frac{1-f^2}{1+f^2} \cdot y', \quad (5)$$

$$y = \frac{1-g^2}{1+g^2} \cdot y' - \frac{2g}{1+g^2} \cdot z', \quad z = \frac{2g}{1+g^2} \cdot y' + \frac{1-g^2}{1+g^2} \cdot z', \quad (6)$$

$$z = \frac{1-h^2}{1+h^2} \cdot z' - \frac{2h}{1+h^2} \cdot x', \quad x = \frac{2h}{1+h^2} \cdot z' + \frac{1-h^2}{1+h^2} \cdot x', \quad (7)$$

$$x = \frac{1+p^2}{1-p^2} \cdot x' + \frac{2p}{1-p^2} \cdot ct', \quad ct = \frac{2p}{1-p^2} \cdot x' + \frac{1+p^2}{1-p^2} \cdot ct', \quad (8)$$

$$y = \frac{1+q^2}{1-q^2} \cdot y' + \frac{2q}{1-q^2} \cdot ct', \quad ct = \frac{2q}{1-q^2} \cdot y' + \frac{1+q^2}{1-q^2} \cdot ct', \quad (9)$$

$$z = \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot z' + \frac{2r}{1-r^2} \cdot ct', \quad ct = \frac{2r}{1-r^2} \cdot z' + \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot ct', \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{1-f^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2g}{1-g^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2h}{1-h^2}, \quad (11)$$

$$\operatorname{sign} \varphi = \operatorname{sign} f, \quad \operatorname{sign} \psi = \operatorname{sign} g, \quad \operatorname{sign} \theta = \operatorname{sign} h, \quad (12)$$

$$u = \frac{2p}{1+p^2} \cdot c, \quad v = \frac{2q}{1+q^2} \cdot c, \quad w = \frac{2r}{1+r^2} \cdot c, \quad (13)$$

$$\alpha \in \mathbf{R} \cdot \mathbf{L}, \quad \beta \in \mathbf{R} \cdot \mathbf{L}, \quad \gamma \in \mathbf{R} \cdot \mathbf{L}, \quad c\tau \in \mathbf{R} \cdot \mathbf{L}, \quad (14)$$

$$f \in \overline{\mathbf{R}}, \quad g \in \overline{\mathbf{R}}, \quad h \in \overline{\mathbf{R}}, \quad (15)$$

$$p \in [-1, 1], \quad q \in [-1, 1], \quad r \in [-1, 1]. \quad (16)$$

Формулы (11-13), приведенные для удобства, связывают шесть безразмерных параметров f, g, h, p, q, r с эквивалентными параметрами: углами φ, ψ, θ вращения относительно координатных осей и координатами u, v, w скорости одной системы отсчета относительно другой. Формулы (14-16) показывают пределы изменения значений десяти параметров рассмотренных преобразований. Буква $\mathbf{L}$ обозначает некоторую единицу длины, необходимую для задания четырех размерных параметров трансляции (14).

3. Некоторые понятия и выводы

Рациональная функция задается отношением двух многочленов. Полученные формулы преобразований (1-10), вместе с формулами (13), содержат только рациональные функции. Более того, здесь рассматривается класс *рациональных функций с целыми коэффициентами*. Такие функции переводят *рациональные числа* (дроби) в рациональные числа.

Определим *рациональные преобразования Лоренца* при помощи формул (1-10), в которых все десять параметров $\alpha, \beta, \gamma, c\tau, f, g, h, p, q, r$ принимают только рациональные значения. *Иррациональные преобразования Лоренца* – это все другие преобразования Лоренца.

Вывод первый. Преобразования Лоренца записываются через рациональные функции.

Вывод второй. Рациональные преобразования Лоренца образуют подгруппу в группе преобразований Лоренца.

Можно также рассматривать *алгебраические и трансцендентные преобразования Лоренца*, если значения параметров задаются соответственно алгебраическими и не только алгебраическими, например трансцендентными, числами. То, что рациональные и алгебраические числа являются числовыми полями, объясняет, почему рациональные и алгебраические преобразования Лоренца являются группами.

Вывод третий. Рациональные преобразования Лоренца образуют всюду плотное множество во множестве преобразований Лоренца.

Пусть k физических величин $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, имеющих одну и ту же размерность, связаны соотношением

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_k\omega_k = 0, \text{ где } n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbf{Z},$$

причем $(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Такое соотношение принято называть *резонансным соотношением*.

Вывод четвертый. Рациональные преобразования Лоренца могут быть представлены в виде системы резонансных соотношений для восьми координат и единицы длины

$$x, y, z, ct, x', y', z', ct', L.$$

Вывод пятый. Рациональные преобразования Лоренца переводят рациональные координаты x, y, z, ct в рациональные координаты x', y', z', ct' .

Аналогично, алгебраические преобразования Лоренца переводят алгебраические координаты в алгебраические.

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Я.А. Бутко, О.Г. Смолянов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В сообщении рассматривается новый метод исследования и описания динамики физических систем. Метод основан на представлении решений начальных и начально-краевых задач для соответствующих эволюционных уравнений с помощью формул Фейнмана, то есть в виде пределов конечнократных интегралов при стремлении кратности к бесконечности. Для многих начально-краевых задач функции Грина неизвестны в явном виде. В то же время для некоторых таких задач удастся получить формулы Фейнмана, содержащие конечнократные интегралы только от элементарных функций. Такие формулы Фейнмана позволяют проводить непосредственные вычисления решений эволюционных уравнений, пригодны для аппроксимации переходных вероятностей случайных процессов, и могут быть использованы для компьютерного моделирования случайных процессов. В последнее десятилетие аппарат формул Фейнмана активно применяется для описания различных типов динамики в областях евклидовых пространств и римановых многообразий, в бесконечномерных линейных и нелинейных пространствах, при исследовании p -адических аналогов уравнений математической физики (см., например, [1-12]).

В докладе рассматриваются формулы Фейнмана для уравнения для некоторого класса параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В частности, обсуждаются формулы Фейнмана, представляющие решения задачи Коши-Дирихле для уравнения теплопроводности и для некоторых более общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в областях как евклидова пространства, так и риманова многообразия (см. [1-2]). Отметим, что с помощью полученных формул Фейнмана в среде MATLAB проведены эксперименты по моделированию решения задачи Коши-Дирихле для одномерного параболического уравнения с переменным коэффициентом при второй производной (см. [5]).

Рассмотренные параболические уравнения второго порядка являются уравнениями Колмогорова для диффузионных процессов (в том числе и процессов с переменным коэффициентом диффузии) в области евклидова пространства (или риманова многообразия) с поглощением на границе. Так как переходные вероятности таких процессов не выражаются через элементарные функции, то аппарат стохастического анализа применять для решения соответствующих уравнений затруднительно. В то же время, полученные формулы Фейнмана не содержат переходных вероятностей соответствующих процессов и, благодаря своей связи с формулами Фейнмана-Каца, позволяют эти переходные вероятности аппроксимировать.

Заметим, что получены также формулы Фейнмана, представляющие решения начальных и начально-краевых задач для уравнения Шрёдингера в евклидовом пространстве и римановом многообразии (см., например, [8], [11]). При этом, формулы Фейнмана для уравнений шрёдингеровского типа позволяют определить различные классы интегралов Фейнмана по траекториям как в конфигурационном, так и в фазовом пространстве описываемой уравнением квантовой системы.

Список литературы

1. Я.А. Бутко. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Математические заметки. - 2008. - Т.83, вып. 3. - С. 333-349.
2. Я.А. Бутко, М. Гротхаус, О.Г. Смолянов. Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области // Доклады Академии Наук. - 2008. - Т. 421, №6. - С. 727-732.
3. Я.А. Бутко, О.Г. Смолянов, Р.Л. Шиллинг. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп, // Доклады Академии Наук. - 2010. - Т.434, N.1. - С. 7-11.
4. М. Гаделья, О.Г. Смолянов. Формулы Фейнмана для частиц с массой, зависящей от координаты // Доклады Академии Наук. - 2008. - Т. 418, N. 6. - С. 727-730.
5. А.В.Дурагин. Формулы Фейнмана для параболического уравнения второго порядка и их применение. Дипломная работа. М.: МГТУ, 2010. - 52 с.
6. О.Г. Смолянов, Х.ф. Вайцзеккер, О. Виттих, Формулы Фейнмана для задачи Коши в областях с границей // Доклады Академии Наук. - 2004. - Т. 395, N. 5. - С. 596-600.
7. О.Г. Смолянов, Х.ф. Вайцзеккер. Формулы Фейнмана, порождаемые самосопряженными расширениями оператора Лапласа// Доклады Академии Наук. - 2009. - Т.426, N.2. - С.162-165.
8. О.Г. Смолянов, А. Трумен. Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнения Шрёдингера в ограниченных областях // Доклады Академии Наук. - 2004. - Т. 399, N. 3. - С. 310-314.
9. О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе, Формулы Фейнмана для решений бесконечномерных уравнений Шрёдингера с полиномиальными потенциалами // Доклады Академии Наук. - 2003. - Т.390, N.3. - С. 321-324.
10. О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. Формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова // Доклады Академии Наук. - 2008. - Т. 420, N. 1. - С.1-6.
11. O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev A.G., A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J.Math. Phys. - 2002. - V.43. N. 10. - P. 5161-5171.
12. O.G.Smolyanov, H.v. Weizsaecker, O. Wittich. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures. // Doklady Math. - 2000. - V. 61. - P. 230-234.

ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ МАРШРУТИЗАЦИИ ГЛОБАЛЬНОЙ ПАКЕТНОЙ СЕТИ

Н. С. Васильев

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Введение. Глобальная транспортная сеть (ТС) (электрическая, трубопроводная, передачи данных) представляет собой систему связанных между собой отдельных подсетей с огромным числом пользователей. При создании алгоритмов управления передачей учитывают интересы пользователей. Разработка и совершенствование распределенных алгоритмов управления обуславливает необходимость применения игрового подхода (см. [1-4]).

В докладе рассмотрена многокритериальная оптимизационная задача маршрутизации глобальной многопродуктовой сети. В качестве принципа оптимальности выбрано понятие равновесия по Нэшу (см. [2-4]).

Создание эффективных систем управления потоками в транспортных сетях, в частности, в пакетных телекоммуникационных системах, основано на моделях сетей с переменной метрикой (см. [1-3]). Изменяемая метрика присуща даже однопродуктовой пакетной сети из-за наличия обратной связи между потоками и задержкой в передаче пакетов. При этом величина задержки на линиях сети используется в качестве длины линии, т.е. метрики. Игнорирование этой зависимости не позволяет обеспечить устойчивое управление потоками ТС (см. [1]).

Свойства ТС с переменной метрикой ранее изучались в связи с поиском равновесной маршрутизации глобальной пакетной сети передачи данных (см. [2,3]). Вычислительные эксперименты с моделью сети Интернет (см. [2]) показали наличие равновесия по Нэшу. В докладе дано теоретическое обоснование этого явления.

В докладе представлена модель сети, для которой доказано существование равновесия по Нэшу в векторной задаче маршрутизации. Установлено, что равновесие обладает свойствами устойчивости и эффективности по Парето (см. [4]). Обоснована сходимость игрового алгоритма поиска равновесия.

Оптимизационная модель ТС. Топологию ТС будем представлять в виде связного неориентированного графа $G = (U, V)$, вдоль ребер $l \in V$, $l=1,2,...,n$, которого расположены линии (каналы) передачи продуктов, а в узлах $u \in U$ размещены “источники” и “стоки” передаваемых потоков. Доставка продуктов каждой k -й пары источник–сток, или тяготеющей пары, $k=1,2,...,K$, осуществляется по одному или нескольким маршрутам графа сети $\{L_j^k\}$, соединяющим эти узлы. Входные потоки $\lambda_k = \lambda_0^k$ поступают в узлы–источники,

разделяются в них на маршрутные потоки величины $\{\lambda_j^k\}$ и по маршрутам $\{L_j^k\}$ передаются в соответствующие узлы-стоки, из которых покидают ТС.

Функционирование сети происходит с задержками $f_i(z_i)$ на линиях сети $i=1,2,...,n$, зависящими от величин потоков z_i . Например, в пакетных сетях передачи данных величина задержки всякого пакета на любой линии складывается из следующих величин:

- времени определения направления дальнейшей передачи (в транзитный узел сети) с помощью маршрутной таблицы,
- времени ожидания пакета в очереди,
- времени пересылки пакета по выбранной линии.

Определение функций задержек составляет самостоятельную задачу (см. [1]). Во всяком случае, эти функции неотрицательны, монотонно и неограниченно возрастают при увеличении интенсивности потока по линии до величины ее пропускной способности. (Согласно теории массового обслуживания, при совпадении интенсивностей поступления и обслуживания заявок наблюдается неограниченный рост очередей.)

Время доставки продуктов вдоль маршрута L (или “длина” маршрута L) равно сумме задержек

$$\rho_f(L, z) = \sum_{i \in L} f_i(z_i). \quad (1)$$

Зафиксировав векторную функцию $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, опустим индекс f в обозначении метрики сети (1). Потоки в сети задаются в единицах измерения интенсивности передачи. Поэтому для всех допустимых значений индексов k, l выполняются балансовые соотношения

$$\sum_{j=1}^{J_k} \lambda_j^k = \lambda_0^k, \quad \sum_{j, k \in L_j^k} \lambda_j^k = z_l. \quad (2)$$

Через z_l в (2) обозначен суммарный поток по l -й линии ТС, который ограничен величиной $\bar{z}_l$ – пропускной способностью линии:

$$z_l \leq \bar{z}_l, \quad l=1,2,\dots,n. \quad (3)$$

Под допустимой маршрутизацией (ДМ) сети (для k -й тяготеющей пары) будем понимать совокупность маршрутов $M^k = \{L_j^k\}$ и маршрутных потоков $\{\lambda_j^k\}$ (интенсивностей передачи) для всех тяготеющих пар $k=1,2,\dots,K$, такую, что выполняются соотношения (2), (3) и $\rho(L_j^k, z) < \infty$. Векторный входной поток $(\lambda_0^1, \lambda_0^2, \dots, \lambda_0^K)$ называется допустимым, если для него найдется ДМ.

Задавая маршрутизацию, будем перечислять только применяемые маршруты передачи, для которых маршрутные потоки положительны. В процессе управления ТС за счет ограничения входного потока обеспечивается его допустимость. Выбор допустимой маршрутизации $M = \{\{L_j^k\}, \{\lambda_j^k\}, k=1,2,\dots,K\}$ однозначно задает вектор допустимых потоков по линиям ТС $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, от которого зависит время передачи продуктов (изменяется метрика сети (1)).

Любая k -я тяготеющая пара “заинтересована” в уменьшении времени доставки продуктов, определяемого длинами применяемых маршрутов передачи (1). В сети с потоками z минимально возможное время доставки продуктов k -й пары равно $\underline{T}^k(z) = \min_{\{L^k\}} \rho(L^k, z)$, где $\{L^k\}$ – множество всех маршрутов, соединяющих эту пару.

Маршрутизацию k -й тяготеющей пары назовем оптимальной, если все применяемые маршруты передачи имеют минимальную длину, равную $\underline{T}^k(z)$.

Так как вектор z зависит от выбираемой маршрутизации (см. (2)), то оптимальным решением этой задачи для k -й пары является выбор ее кратчайших маршрутов соединения в сети с изменяющейся метрикой (1) (см [5]).

Далее исследуется игровая задача об оптимальной маршрутизации ТС. Тяготеющие пары $k=1,2,...,K$ рассматриваются как игроки в бескоалиционной игре, выбирающие свою стратегию – маршрутизацию (см. [2,4]). Равновесие по Нэшу в этой игре назовем равновесной (оптимальной) маршрутизацией ТС. Соответствующий вектор потоков в сети также будем называть равновесным.

В равновесии каждой тяготеющей паре “невыгодно” отклоняться от своей маршрутизации (из-за этого время передачи продуктов только увеличится) при условии, что все остальные пары придерживаются своих маршрутизаций.

На практике выбор маршрутизации может проводиться не самими тяготеющими парами, а с помощью некоторого алгоритма, построенного на этом принципе. (Таковы сетевые протоколы [1].)

Теорема. Пусть многогранник допустимых потоков $Z \neq \emptyset$, а все функции задержек монотонно возрастают, дифференцируемы и $(\forall l) f_l(z) \rightarrow \infty, z \rightarrow \bar{z}_l$.

Тогда существует равновесная маршрутизация.

Список литературы

1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. – М.: Наука, 1989.- 338 с.
2. Васильев Н.С., Федоров В.В. О построении алгоритмов маршрутизации пакетных сетей на основе векторных критериев// Известия РАН. Теория и системы управления. –2005 – №3. – С. 36–47.
3. Васильев Н.С. Задача о кратчайших маршрутах в сетях с переменной метрикой// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Сер. “Естеств. Науки”.– 2008– №1. –С.70–75.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето - оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.-282 с.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В.А. Камышников

Томский государственный архитектурно-строительный университет

Актуальность и постановка задачи.

Некоторые практические задачи оптимизации требуют получения оптимального решения, в котором искомые переменные имели бы целочисленные значения, а иногда и значения из какого-либо дискретного множества, множества не обязательно целых чисел [1,2]. Такие задачи называют задачами целочисленного или дискретного программирования.

Если переменные принимают только два значения: 0 и 1, как это следует в задаче о ранце, то такие задачи относят к задачам булевого программирования.

Счетность множества решений задач дискретного программирования всегда представляло из себя соблазн их простого перебора. К сожалению полный перебор мог быть осуществлен лишь для задач малой размерности, но эта лежащая на поверхности идея способствовала появлению методов неявного перебора: аддитивный алгоритм Балаша; метод лексикографического перебора; метод муравьиных колоний; генетические алгоритмы; метод отжига металла; нейронные сети; метод неявного перебора по векторной решетке; метод неявного перебора, основанный на стратегии локального поиска и другие.

Эти методы достаточно хорошо и широко описаны и часто дают решения некоторых задач.

В настоящее время считается работоспособным алгоритм, если трудоемкость решения задач с его помощью растет полиномиально с ростом размера входных данных – переменных и ограничений. К сожалению, задачи линейного программирования, в т.ч. и дискретные задачи линейного программирования относятся к *NP*-полным задачам, которые нельзя решить никаким полиномиальным алгоритмом.

Поэтому конструирование точного метода для решения таких задач, особенно большой размерности до сих пор сталкивается с непреодолимым препятствием – длительностью решения, и до сих пор оценка эффективности для таких задач в руках вычислительной практики.

Все это свидетельствует об актуальности работ по созданию эффективных методов решения задач линейного целочисленного, в т. ч. булевого программирования.

Основные результаты и научная новизна.

Метод баланса осуществляет неявный перебор решений задачи и напоминает в чем-то известный аддитивный алгоритм Балаша. Как показал массовый вычислительный эксперимент он, этот метод практически всегда дает решение, а часто и условно точное (оптимальное) решение задачи линейного целочисленного программирования с булевыми переменными за приемлемое время. Размерность, решаемой задачи определяется только емкостью жесткого

диска, Удалось решать задачи (Fortran-программа) на компьютере с емкостью жесткого диска 6GB до размерности 10000 переменных за время измеряемое минутами. И это не предел.

Надо заметить, что оптимальная точка неизвестна, поэтому для оценки точности решения использовалась точка, наилучшая для генерируемой модели. Генератор задач вначале процесса выбирает случайным образом точку, которая будет допустимой, а м. б. и оптимальной для будущей модели. В качестве цифровых значений коэффициентов целевой функции и ограничений генератор выбирает также случайные числа. Затем производится расчет правых частей ограничений. Такой порядок формирования математической модели задачи при поиске максимума целевой функции обеспечивал то, что значение целевой функции в выбранной случайно допустимой точке могло служить нижней оценкой максимального значения целевой функции задачи на области определения.

Экспериментальная проверка алгоритма позволила получить приближенную оценку числа итераций – чаще всего число итераций не превышало $10n$, где n – число переменных задачи, и зависимость числа итераций от числа переменных близка к линейной.

Подсчет арифметических и логических операций, которые необходимо выполнить при реализации одной итерации алгоритма показал, что ее трудоемкость примерно равна трудоемкости одной итерации симплекс-метода при решении такой же по размеру задачи линейного программирования.

Приведенные здесь результаты решения тестовых задач, доказывают неприхотливость алгоритма, его всеядность, независимость от вида ограничений и значений коэффициентов.

Ниже даются таблицы результатов вычислительных экспериментов над более чем 8000 задач с булевыми переменными. Не нашлось решение 1507 задач, что составило 18,83% от общего числа решаемых задач. Среднее отклонение от предполагаемого максимума целевой функции в решенных задачах составило 1,79 единиц.

Решение находилось всегда, если коэффициенты модели были положительны или нуль, а не нашлось решение только для некоторых задач, в математической модели которых встречались отрицательные коэффициенты.

Несомненно, это свидетельствует о научной новизне полученных результатов.

Метод баланса.

Метод баланса при решении задач целочисленного программирования с булевыми переменными осуществляет неявный перебор решений задачи и напоминает в чем-то известный аддитивный алгоритм Балаша и практически всегда дает решение, а часто точное решение задачи линейного целочисленного программирования с булевыми переменными.

Экспериментальная проверка алгоритма позволила получить приближенную оценку числа итераций. Так при решении задач чаще всего число итераций не превышает $10n$, где n – число переменных задачи, и зависимость числа итераций от числа переменных явно линейная. Конечно, все

это справедливо для задач, которые удалось с помощью алгоритма решить. Зависимость от числа ограничений тоже существует, она проявляется тоже как линейная, но с коэффициентом меньшим 10.

Подсчет арифметических и логических операций, которые необходимо выполнить при реализации одной итерации алгоритма показал, что трудоемкость одной итерации алгоритма примерно равна трудоемкости одной итерации симплекс-метода при решении задач линейного программирования.

Приведем здесь некоторые результаты решения тестовых задач, которые должны продемонстрировать неприхотливость алгоритма, его всеядность, независимость от вида ограничений и значений коэффициентов.

Цифровые значения для задач выбирались на основе генератора случайных чисел, чтобы процесс проверки имел более объективный характер.

Исследование алгоритма на основе решения множества тестовых задач проводилось в т.ч. и с целью выявления зависимости трудоемкости решения от объемных параметров задачи, т.е. зависимости времени решения от числа переменных и числа ограничений. Кроме того, результаты решения тестовых задач должны продемонстрировать неприхотливость алгоритма, его всеядность, независимость от вида ограничений и значений коэффициентов.

В качестве цифровых значений коэффициентов задач выбираются псевдо случайные числа с помощью генератора случайных чисел. Также с помощью генератора случайных чисел выбираются координаты допустимой точки задачи, на основе которых производится расчет правых частей ограничений, и поэтому значение целевой функции в такой точке может служить нижней оценкой максимального ее значения на области определения.

В таблицах 1 и 2 представлены результаты вычислительных экспериментов над более чем 8000 задач с булевыми переменными.

Таблица 1.

Сокращенная таблица результатов решения задач линейного программирования с булевыми переменными методом баланса

Число переменных	Число ограничений	Число решаемых задач:			Отклонение от контрольного значения	Среднее время решения задачи, мин.
		Решалось	Не решено	В %		
10	100	19	0	0,00	2,58	1,71
10	1000	2	0	0,00	1,00	1,82
50	5	144	2	1,39	0,69	13,20
50	10	87	0	0,00	2,11	3,19
50	50	5	0	0,00	1,80	12,52
100	5	20	0	0,00	1,95	10,37
100	10	30	0	0,00	2,83	22,30
500	10	1	0	0,00	3,00	9,97
1000	10	1	0	0,00	3,00	5,13

В таблице 2 приведены результаты решения задач линейного программирования с булевыми переменными (2412 задач).

Таблица 2.
Затратные характеристики алгоритма баланса при решении задач линейного программирования с булевыми переменными

n	m	L	T	$Iter$	t	2^n	%	$10nm$
5	100	21	0,16	11	0,86	32	34,38	5000
7	2000	1	1,29	23	3,36	128	17,97	140000
10	100	19	1,71	42	2,45	1024	4,10	10000
10	1000	2	1,82	40	2,73	1024	3,91	100000
100	5	20	10,37	237	2,63	$\gg 10^{16}$	0,00	5000
100	10	30	22,30	233	5,74	$\gg 10^{16}$	0,00	10000
500	10	1	9,97	202	2,96	$\gg 10^{16}$	0,00	50000
1000	10	11	5,13	59	5,22	$\gg 10^{16}$	0,00	100000
10000	5	10	22,1	411	17,3	$\gg 10^{16}$	0,00	500000

Обозначения, использованные в таблице: $Iter$, T – среднее число итераций и среднее время (мин.), потребовавшихся алгоритму баланса для решения L задач размерностью nm ; t – среднее время выполнения одной итерации (сек.); 2^n – число возможных решений (число полного перебора решений); % – значение $Iter$ в процентах к 2^n ; $10nm$ – оценка числа итераций для симплекс метода при решении задачи линейного программирования.

Список литературы

1. Г. Вагнер. Основы исследования операций. Том 1,2,3. М., Мир, 1972.
2. И.К. Волков, Е.А. Загоруйко. Исследование операций. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.

О ПРАВИЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЯХ

Е.В. Коломейкина

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В кристалле расположение атомов периодически, и сколь угодно большой фрагмент повторяется бесконечное число раз. Расположение ближних атомов по отношению к данному атому кристалла обусловлено их взаимодействием. В свое время автор знаменитой “белой” книги “Очерки о структурной минералогии” академик Н.В. Белов задавался вопросом: как располагаются дальние атомы относительно данного атома, и почему, например,

определенный атом знает свое место в кристалле? С подачи ученика Н.В. Белова – кристаллографа Р.В. Галиулина, сотрудничавшего с Б.Н. Делоне, этот вопрос был сформулирован в виде следующей математической задачи. Описать автономно от системы атомов те локальные условия, которые нужно наложить на некоторую конечную совокупность точек (звезду), которые бы гарантировали продолжение этой звезды до правильной системы точек. Напомним, что система атомов называется правильной системой точек, если для любых двух атомов системы существует движение, переводящее один атом в другой и всю систему атомов в себя.

Ответ на данную задачу был найден тридцать лет назад группой учеников Делоне и представлен в виде локальной теоремы. Поскольку минерал представляет собой вещество однородное, то есть в любом сколь угодно малом его участке не может накапливаться бесконечное количество атомов, и одновременно вещество не может быть сильно разреженным, вводим понятие (r, R) –системы, отвечающее за однородность системы атомов. Множество атомов X является (r, R) –системой, если в любом открытом шаре радиуса r содержится не более 1 точки множества X , а в любом замкнутом шаре радиуса R содержится не менее 1 точки множества X . Определим понятие звезды радиуса k для точки x множества X . В шар с центром в точке x радиуса k попадают точки множества X , соединим их с x отрезками, получим звезду $Star_x(k)$. Скажем, что две звезды конгруэнтны, если одну из них можно перевести в другую движением. Обозначим через $S_x(k)$ группу симметрий звезды радиуса k в точке x . Сформулируем локальную теорему для точечной системы, подробнее см. [1].

Локальная теорема. (r, R) –система точек пространства постоянной кривизны является правильной тогда и только тогда, когда найдется такой радиус k , что следующие два условия выполняются:

- 1) все звезды радиуса k попарно конгруэнтны;
- 2) для любого $x \in X$: $S_x(k) = S_x(k - 2R)$.

Данная теорема подтверждает периодичность строения кристалла. Каждой точке x множества X можно поставить в соответствие область Дирихле–Вороного, поэтому (r, R) –системе точек пространства E^n можно поставить в соответствие разбиение пространства E^n на многогранники. Разбиением пространства постоянной кривизны на многоугольники называется бесконечное множество, состоящее из многогранников $P_1, P_2, \dots$ таких, что их объединение совпадает со всем пространством E^n , и любые два из них пересекаются, как максимум, по элементам границы (граням, ребрам, вершинам).

Мы будем рассматривать только нормальные разбиения пространства постоянной кривизны (разбиения грань-в-грань), иными словами, разбиения, в которых любые два многогранника либо не пересекаются вовсе, либо пересекаются по целой общей для обоих многогранников грани, см. рис. 1–3.

Разбиение “кирпичная кладка” не является примером нормального разбиения евклидовой плоскости.

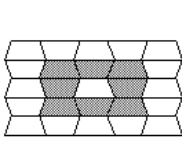


Рис. 1.

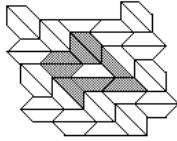


Рис. 2.

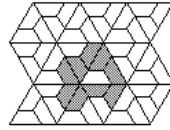


Рис. 3.

Важным примером разбиения пространства являются правильные разбиения.

Определение 1. Разбиение пространства X^n на многогранники называется правильным, если его группа симметрий действует на множестве многогранников разбиения транзитивно. Транзитивность действия группы симметрий состоит в том, что для любых двух многогранников P_1 и P_2 разбиения существует движение g разбиения, которое переводит первый многогранник во второй и само разбиение в себя.

На рис. 1–3 представлены примеры правильных нормальных разбиений. Существует также аналог локальной теоремы – локальная теорема для разбиений пространства на многогранники. Перед тем, как ее сформулировать, дадим ряд определений. Аналогом звезды радиуса k будет окружение многогранника соседними многогранниками, называемое короной радиуса k . Дадим четкое определение полной и неполной короны многогранника P .

Определение 2. Полной короной радиуса 1 многогранника P разбиения некоторого пространства X^n назовем совокупность многогранников данного разбиения, которые смежны с P по каким-нибудь элементам границы многогранника P (граням, ребрам или вершинам). Индуктивно определяем корону радиуса k . Если корона радиуса $k-1$ уже определена, то короной радиуса k называется совокупность многогранников, смежных с многогранниками короны радиуса $k-1$ по границе. На рис. 1–3 полные короны трапедий закрашены.

Определение 3. Неполной короной радиуса 1 многогранника P разбиения T пространства X^n называется совокупность многогранников данного разбиения, которые смежны с многогранником P только по $(n-1)$ -мерным граням.

Определение 3 также можно распространить на короны любого радиуса. Для евклидовой плоскости неполной короной радиуса 1 называется совокупность многоугольников данного разбиения, которые смежны с P только по сторонам.

Определение 4. Для короны $C(P)$ с центром в P движение g , которое переводит в себя одновременно ее центр P и саму корону $C(P)$, называется симметрией короны $C(P)$.

Определение 5. Короны $C(P_1)$ и $C(P_2)$ двух многогранников P_1 и P_2 данного разбиения T конгруэнтны, если существует движение g такое, что $g(P_1) = P_2$ и $g(C(P_1)) = C(P_2)$. Движение g не обязано быть симметрией разбиения T .

Обозначим группу симметрий короны $C(P)$ радиуса k через $S_k(P)$. В работе [4] была доказана теорема, которая также подтверждает интуитивное представление о локальных причинах правильности строения кристаллов. Б.Н. Делоне, М.И. Штогрин, Н.П. Долбилин и Р.В. Галиулин нашли объяснение тому, что из попарной конгруэнтности корон некоторого радиуса следует конгруэнтность корон любого большего радиуса, что в свою очередь эквивалентно правильности разбиения. Сформулируем эту теорему, называемую

Локальная теорема для разбиений. Разбиение T пространства постоянной кривизны является правильным тогда и только тогда, когда существует натуральное k такое, что:

- 1) все короны радиуса k попарно конгруэнтны;
- 2) для любого $P \in T$: $S_k(P) = S_{k-1}(P)$.

Из этой теоремы и того факта, что с увеличением радиуса короны группа симметрий короны не возрастает, немедленно вытекает следствие: если все короны радиуса 1 в разбиении T пространства постоянной кривизны попарно конгруэнтны и группа симметрий многогранника тривиальна, то разбиение правильное.

Рассмотрим некоторые результаты, полученные из локальной теоремы. Для евклидового пространства размерности 3 существовала гипотеза о том, что для обеспечения правильности разбиения пространства E^3 достаточно попарной конгруэнтности корон радиуса 1. Однако Питер Энгел предъявил разбиение трехмерного пространства на многогранники, в котором все короны радиуса 1 конгруэнтны, но разбиение правильным не является. Для евклидовой плоскости дело обстоит довольно прозрачно. Н.П. Долбилин и D.Schattschneider, опираясь на локальную теорему и следствие из нее, доказали, что для правильности разбиения евклидовой плоскости достаточно попарной конгруэнтности полных корон радиуса 1, подробнее см. [3].

Автором было показано, что если мы возьмем неполные короны, то их попарной конгруэнтности уже будет достаточно для установления правильности разбиения евклидовой плоскости, подробнее в [2]. Этот результат улучшает результат [3].

Теорема 1. Если в разбиении евклидовой плоскости все неполные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны, то разбиение правильное.

В геометрической кристаллографии важными объектами являются изоэдры – выпуклые многогранники, группы симметрий которых действуют на множестве их граней транзитивно. Группа симметрий многогранника с конечным числом граней конечна. Среди конечных групп выделяют группы поворотов решетки, имеющие название кристаллических классов. Один из видов изоэдра, группа симметрий которого является кристаллическим классом,

называется простой формой. Проекция же простой формы на сферу является правильным разбиением сферы.

Теорема 2. Если в разбиении двумерной сферы все неполные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны, то разбиение сферы правильно.

Отметим так же, что для двумерной плоскости Лобачевского конгруэнтности корон радиуса 1 в общем случае не достаточно. К.Берецки построил разбиение, в котором все первые короны попарно конгруэнтны, а разбиение, тем не менее, не только не правильно, но даже и не кристаллографично, то есть объем фундаментальной области бесконечен. Напомним, что кристаллографической группой, действующей в пространстве, называется дискретная группа с компактной фундаментальной областью.

Список литературы

1. Делоне Б.Н., Долбиллин Н.П., Штогрин М.И., Галиулин Р.В., Локальный критерий критерий правильности системы точек, АН СССР, матем., 227, № 1, 1976, - С. 319-322.

2. Коломейкина Е.В., Локальные условия правильности разбиения евклидовой плоскости. // Чебышевский сборник, Т.5, вып. 3 (11), 2004, - С. 31-51.

3. Dolbilin N.P., Schattschneider D., The local theorem for tilings // Quasi Crystals and Discrete Geometry / Ed.J.Patera. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1998, P. 193-200. (Fields Inst. Monogr.; V. 10).

АЛГОРИТМ БЫСТРОГО НАХОЖДЕНИЯ ФИНИТНЫХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНО-ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Я.Ю. Коновалов, О.В. Кравченко

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Финитные решения функционально дифференциальных уравнений (ФДУ) вида

$$Lf'(x) = \sum_{k=1}^N c_k f(a_k x + b_k), a_k > 1 \quad (1)$$

с условием $a_k = a$, $k=1...N$ являются основой изучения теории атомарных функций (АФ) [1-4].

В [5] предложен быстрый алгоритм вычисления АФ и h_a (рис.1), удовлетворяющих ФДУ:

$$\text{up}'(x) = 2 \text{up}(2x+1) - 2 \text{up}(2x-1) \quad (2)$$

$$h'_a(x) = \frac{a^2}{2} (h_a(ax+1) - h_a(ax-1)) \quad (3)$$

Алгоритм состоит из двух этапов: итерационного построения самоподобной последовательности, структура которой связана с видом L и ее суммирования. Кроме того, в [5] описана модификация алгоритма, представляющая собой чередование операции продолжения последовательности и суммирования.

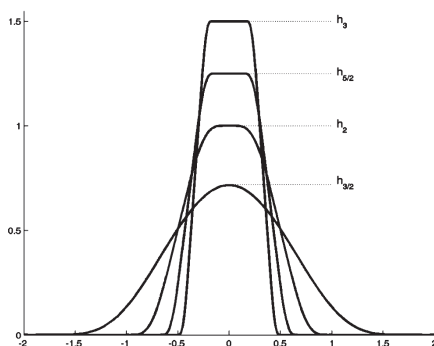


Рис. 1. Атомарные функции $h_a(x)$, $a = 3/2, 2, 5/2, 3$.

Отметим, что функции $up(x)$ и h_a четные, симметричные, а их участки возрастания и убывания имеют одинаковый масштаб.

Первоначально задача отыскания финитных решений [1] формулировалась как задача поиска функции, которая имеет положительный участок производной (горб) и отрицательный участок производной (яма), подобные самой функции. В данной работе рассматривается обобщение задачи отыскания финитных решений ФДУ на следующие случаи:

- функция несимметрична (участки возрастания и убывания произвольно чередуются);
- участки возрастания и убывания имеют разные масштабы (a_k в формуле (1) различны);
- носители слагаемых $f(a_k x + b_k)$ пересекаются.

Для нахождения финитных решений ФДУ, в указанных выше случаях, модифицируем описанный в [5] алгоритм вычисления АФ.

Пусть уравнение имеет вид

$$f' = \sum_{k=1}^N c_k f(ax + b_k) \quad (4)$$

В этом случае работа алгоритма полностью аналогична предложенному в [5].

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) = k(3f(3x) - 2f(3x - 1) - f(3x - 2)).$$

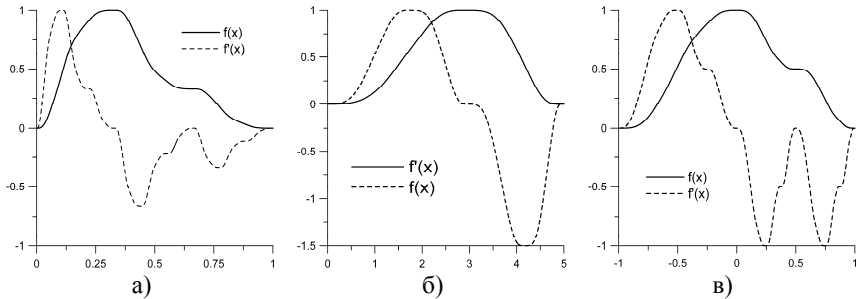
Функция $f(x)$ имеет носитель $[0;1]$. Производная функции состоит из трех участков: $3f(x)$ сжатой втрое на отрезке $[0, \frac{1}{3}]$, $-2f(x)$ сжатой втрое на $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ и $-f(x)$ сжатой втрое на $[\frac{2}{3}, 1]$. Будем строить последовательность итерационно. Предположим, построена последовательность длины 3^m (исходная). Тогда составим последовательность длиной 3^{m+1} по следующему правилу: первые 3^m членов – исходная последовательность членов, умноженных на 3, затем члены исходной последовательности, умноженные на -2 и, наконец, 3^m членов исходной последовательности умноженных на -1 . После того как последовательность длиной 3^n построена, суммируем ее n раз. Пример вычислений для $n=3$ приведен в таблице 1. Графики решения и его производной представлены на рис. 2а.

Решение ФДУ (Пример 1)

Рассмотрим уравнение со слагаемыми разного масштаба. Пусть правая часть уравнения представлена двумя слагаемыми, а a_k связаны рациональным соотношением. Тогда ФДУ принимает вид (1)

В этом случае можно учитывать соотношение между носителями слагаемых, повторяя отсчеты последовательности пропорциональное число раз. Рассмотрим два примера.

Пример 2. Уравнение $f'(x) = k\left(2f\left(\frac{5}{3}x\right) - 3f\left(\frac{5}{2}x - \frac{15}{2}\right)\right)$. Носитель функции равен $[0; 5]$. Носители слагаемых правой части $[0; 3]$ и $[3; 5]$. Отношение длин носителей равно $3/2$. Будем выполнять итерации по следующему правилу: пусть построена последовательность длины l (исходная). Первое слагаемое правой части представим последовательностью длины $3l$, состоящей из элементов исходной последовательности повторенных 3 раза и умноженных на 2. Продолжим последовательность отсчетами исходной последовательности, повторенными дважды и умноженными на -3 . Получили последовательность длиной $5l$. Далее будем чередовать суммирование последовательности и продолжение по описанному выше правилу. Пример вычислений приведен в таблице 2. Графики решения и его производной приведены на рис. 2б.



Пример 3. Аналогичный подход можно применить к уравнениям с большим числом слагаемых. Рассмотрим уравнение

Носитель $f(x)$ - отрезок $[-1;1]$. Производная составлена из трех участков, первый из которых имеет длину 1, оставшиеся два - 0,5. Пусть построена последовательность длины 4^n (исходная). Составим последовательность длины 4^{n+1} из трех участков. Первый состоит из дважды повторяющихся отсчетов исходной последовательности, второй и третий из отсчетов исходной умноженных на -1 . Будем чередовать описанную процедуру удлинения последовательности с суммированием. Графики решения и его производной приведены на рис. 2в.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $y'(x) = 3y(2x) - 2y(2x-1) - y(2x-2)$. Функция имеет носитель $[0, 2]$, слагаемые в правой части, соответственно, $[0, 1]$, $[0.5, 1.5]$, $[1, 2]$. Пусть построена последовательность длины $2l$ (исходная). Тогда новая последовательность составляется из четырех участков длины l . Первый участок состоит из отсчетов первой половины исходной последовательности умноженных на 3. Второй из сумм отсчетов второй половины исходной последовательности умноженных на 3 и первой половины исходной последовательности умноженных на -2 . Третий строится аналогично из сумм отсчетов второй половины исходной последовательности умноженных на -2 и первых l отсчетов исходной последовательности умноженных на -1 .

Четвертый участок представляет собой вторую половину исходной последовательности умноженную на -1 .

Список литературы

1. *Кравченко В.Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
2. *Кравченко В.Ф., Рвачёв В.Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
3. *Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М., Синявский Г.П.* Вычислительные методы в современной радиофизике/ Под. ред. В.Ф. Кравченко. М.: 2009.
4. *Kravchenko V.F., Perez-Meana H.M., Ponomaryov V.I.* Adaptive digital processing of multidimensional signals with applications. Moscow, FIZMATLIT, 2009.
5. *Коновалов Я.Ю.* Быстрое вычисление атомарных функций на основе самоподобных последовательностей. // Тезисы 12-й международной научно-технической конференции и выставки «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA-2010». Москва, 31 марта – 2 апреля 2010 г. т.1, с. 134-136.

ТЕОРИЯ АППРОКСИМАЦИИ И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Г.Г. Магарил-Ильяев

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Классическая теория аппроксимации (или теория приближений) берет свое начало с работ П.Л.Чебышева второй половины 19 века. К середине 20 века, в основном, сформировались те задачи, которыми интересовались и продолжают интересоваться специалисты по теории приближений. В шестидесятые годы прошлого века возникла новая постановка – задача об оптимальном восстановлении линейного функционала (а затем и оператора) на классе элементов по неточной информации о самих элементах. Эта задача идеологически тесно связана с понятием поперечника класса функций, предложенного А.Н.Колмогоровым, но имеет явно выраженный информационный характер. Оказалось, что многие задачи теории приближений могут быть интерпретированы как задачи оптимального восстановления. Ниже приводятся примеры таких задач, но сначала дадим общую постановку задачи оптимального восстановления.

Пусть X – векторное пространство, W – непустое множество (класс элементов) в X , Y – нормированное пространство, $I: X \rightarrow Y$ – линейный оператор и $\delta > 0$.

Каждому элементу $x \in W$ сопоставим множество $I^\delta(x) = \{y \in Y \mid \|Ix - y\|_Y \leq \delta\}$, которое назовем информацией об элементе x , а многозначное отображение $I^\delta: W \rightarrow Y$, сопоставляющее x множество $I^\delta(x)$ – информационным отображением (или оператором).

Пусть Z – нормированное пространство. Под задачей оптимального восстановления линейного оператора $\Lambda: X \rightarrow Z$ на классе W по информации $I^\delta(x)$ об элементе $x \in W$ понимается задача о нахождении величины

$$E(\Lambda, W, I^\delta) = \inf_m \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} \|\Lambda x - m(y)\|_Z$$

(где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $m: Y \rightarrow Z$), называемой погрешностью оптимального восстановления и методов $\hat{m}$, на которых нижняя грань достигается, называемых оптимальными методами восстановления.

Задача оптимального восстановления тесно связана со следующей экстремальной задачей,

$$\|\Lambda x\|_Z \rightarrow \max, \quad \|Ix\|_Y \leq \delta, \quad x \in W, \quad (1)$$

которую будем называть двойственной (к задаче оптимального восстановления). Если известно решение задачи (1), то в ряде интересных случаях в соответствующей задаче оптимального восстановления удается найти погрешность оптимального восстановления и оптимальный метод. С другой стороны, многие известные задачи анализа и теории приближений имеют вид задачи (1), которую можно рассматривать как двойственную к задаче восстановления, что позволяет дать иную, информационную, интерпретацию исходной задачи. Приведем здесь три примера, связанных с классическими задачами теории приближений.

1. Задача П.Л.Чебышева об экстраполяции алгебраических полиномов. В 18... году Чебышев нашел решение следующей задачи: среди всех полиномов степени не выше n , значения которых на отрезке $[-1, 1]$ по модулю не превосходят числа $\delta > 0$, найти тот, который принимает максимальное значение в точке $\tau > 1$. Формальная запись этой задачи такова

$$x(\tau) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \delta, \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_n, \quad (2)$$

где $\mathcal{P}_n$ – пространство полиномов степени не выше n . Решением этой задачи является полином $\delta T_n(\cdot)$, где $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ – полином Чебышева.

Задача (2) записывается в форме задачи (1). Действительно, пусть X – пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, $Y = C([-1, 1])$, $Z = \mathbb{R}$, $W = \mathcal{P}_n$, I – оператор сужения функций на отрезок $[-1, 1]$, Λ – линейный функционал $x(\cdot) \mapsto x(\tau)$ и, так как $\mathcal{P}_n$ – пространство, можно писать $x(\tau)$ вместо $|x(\tau)|$. Тогда соответствующая (2) задача оптимального восстановления, очевидно, состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить (на множестве $\mathcal{P}_n$)

значение полинома в точке τ по следующей информации: о каждом полиноме $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ нам известна функция $y(\cdot) \in C([-1, 1])$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \leq \delta$.

Ответ в этой задаче такой: $E(x(\tau), \mathcal{P}_n, I^\delta) = \delta T_n(\tau)$, а оптимальный метод строится так. Надо взять значения наблюдаемой функции $y(\cdot)$ в точках $\tau_k = \cos((n - k + 1)\pi / n)$, $k = 1, \dots, n + 1$ (это точки, где полином Чебышева принимает свои максимальные по модулю значения на $[-1, 1]$), провести через них интерполяционный многочлен Лагранжа и взять значение этого полинома в точке τ . Отметим, что оптимальный метод использует не всю информацию (т.е. функцию $y(\cdot)$), а лишь ее значения в $(n + 1)$ -ой точке.

2. Неравенство С.Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов. В 1912 году Бернштейн доказал следующее точное неравенство

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq n \|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{T}_n, \quad (3)$$

где $\mathcal{T}_n$ – пространство тригонометрических полиномов степени не выше n и $\mathbb{T}$ – окружность единичного радиуса. Подобного рода неравенства играют важную роль в теории приближений.

Нахождение точной константы в (3) равносильно решению следующей задачи

$$\dot{x}(0) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \delta, \quad x(\cdot) \in \mathcal{T}_n.$$

Соответствующая задача оптимального восстановления состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить (на множестве $\mathcal{T}_n$) значение производной полинома в нуле по следующей информации: о каждом полиноме $x(\cdot) \in \mathcal{T}_n$ нам известна функция $y(\cdot) \in C(\mathbb{T})$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \delta$.

Ответ такой: $E(\dot{x}(0), \mathcal{T}_n, I^\delta) = \delta n$, а оптимальный метод строится так. Надо взять значения наблюдаемой функции $y(\cdot)$ в точках $\tau_k = (2k - 1)\pi / 2n$, $k = 1, \dots, 2n$, и сопоставить этому набору число

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{2 \sin^2 \tau_k / 2} y(\tau_k).$$

Здесь также оптимальный метод использует значения функции $y(\cdot)$ лишь в конечном наборе точек.

3. Неравенства для производных гладких функций. Это обширная тематика, связанная с нахождением точных оценок нормы функции и ее производных в той или иной метрике при условии, что известны оценки других ее производных и, вообще говоря, в других метриках. Здесь рассмотрим один пример, когда нужно оценить норму функции в $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, если известны оценки

этой функции и ее производной в $L_2(\mathbb{R}_+)$. В силу возможности сдвига эта задача эквивалентна решению следующей экстремальной задачи

$$x(0) \rightarrow \max, \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta, \quad \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1. \quad (4)$$

Если обозначить через X пространство локально абсолютно непрерывных функций из $L_2(\mathbb{R}_+)$, у которых производная принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+)$, а через W совокупность функций $x(\cdot) \in X$ таких, что $\|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1$, то задача (4) приобретает вид задачи (1).

Соответствующая задача оптимального восстановления состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить (на классе W) значение функции в нуле по следующей информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta$. Ответ такой: $E(x(0), W, I^\delta) = \sqrt{2\delta}$, а оптимальный метод заключается в том, что наблюдаемой функции $y(\cdot)$ ставится в соответствие число

$$\frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} y(t) dt.$$

Доказательство этих и других подобного рода результатов основывается на стандартных методах теории экстремума и выпуклой двойственности (см. [1]).

Список литературы

1. G.G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov. Convex Analysis: Theory and Applications. AMS, Translations of Mathematical Monographs, vol. 222.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К.Ю. Осипенко

МАТИ - российский государственный технический университет имени К.Э. Циолковского

Пусть с фиксированной погрешностью известен конечный набор коэффициентов Фурье некоторой периодической функции. Что можно сказать о самой функции и о ее производных на основании этой информации? Вопрос достаточно естественный и далеко не новый. Как поступают на практике? Высокочастотные коэффициенты Фурье отбрасывают, а остальные фильтруют, т.е. умножают на некоторые сглаживающие коэффициенты. С математической точки зрения эта задача может быть решена с помощью метода регуляризации.

Однако при этом возникает ряд вопросов, которые не решаются при использовании этого метода.

Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной - как же перебрать все методы? Наша цель - показать, что во многих случаях и, в частности, в задаче восстановления функции по неточно заданным коэффициентам Фурье, такая постановка позволяет дойти до конкретных методов.

Перейдем к точным формулировкам. Положим

$$X_p = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots) : \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j |x_j|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $x_j \in K$, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\nu_j \geq 0$, причем лишь конечное число ν_j обращается в ноль. Если $\nu_0 = \nu_1 = \dots = 1$, то соответствующее пространство X_p обычно обозначают через l_p , при этом

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Пусть задан оператор $T: X_p \rightarrow l_p$

$$Tx = (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \dots),$$

где $\mu_j \in K$, а последовательность $|\mu_j|^p / \nu_j$ для достаточно больших j ограничена (из этого условия вытекает, что $Tx \in l_p$ для всех $x \in X$).

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора T на множестве

$$W_p = \left\{ x \in X_p : \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j |x_j|^p \leq 1 \right\}$$

по неточно заданным координатам $x_0, \dots, x_N$. Точнее, предполагается, что для любого $x \in W_p$ известен вектор $y = (y_0, \dots, y_N)$, $y_j \in K$, $j = 0, \dots, N$, такой, что $\|I^N x - y\|_p \leq \delta$, где $I^N x = (x_0, \dots, x_N)$, а $\|\cdot\|_{l_p^N}$ определяется равенством (1), в котором суммирование ведется до N . По вектору y надо восстановить наиболее точно значение Tx .

Под методами восстановления понимаются всевозможные отображения $m: K^N \rightarrow l_p$. Для данного метода m его погрешностью называется величина

$$e_N(T, W_p, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W_p, y \in K^N \\ \|I^N x - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|Tx - m(y)\|_p.$$

Величина

$$E_N(T, W_p, \delta) = \inf_{m: K^N \rightarrow l_p} e_N(T, W_p, \delta, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя, – оптимальным.

Будем предполагать, что $\nu_j > 0$ для всех $j \geq N+1$. Положим

$$A = \sup_{j \geq N+1} \frac{|\mu_j|^p}{\nu_j},$$

$$M = co\{(0,0) \cup \{(|\mu_j|^p, \nu_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}\} + \{(t, tA) | t \geq 0\},$$

где $co\Omega$ – выпуклая оболочка множества Ω . Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по правилу: $\theta(t) = \max\{x | (t, x) \in M\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ – вогнутая ломаная.

Теорема. При всех $\delta > 0$ $E_N(T, W_p, \delta) = \delta \theta^{1/p}(\delta^{-p})$.

Пусть δ^{-p} принадлежит тому промежутку на $\mathbb{R}_+$, где $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 t$. Если $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 > 0$, то для всех α_j , $0 \leq j \leq N$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \frac{|\mu_j - \alpha_j|^q}{\nu_j^{q/p} \hat{\lambda}_2^{q/p}} + \frac{|\alpha_j|^q}{\hat{\lambda}_1^{q/p}} \leq 1, & 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, \\ \frac{|\mu_j - \alpha_j|}{\nu_j \hat{\lambda}_2} \leq 1, \quad \frac{|\alpha_j|}{\hat{\lambda}_1} \leq 1, & p = 1, \end{cases} \quad (2)$$

методы

$$\hat{m}(y) = \sum_{j=0}^N \alpha_j y_j e_j, \quad (3)$$

где $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ – стандартный базис, являются оптимальными. Если $\hat{\lambda}_1 = 0$, то $\hat{m}(y) = 0$ – оптимальный метод, а если $\hat{\lambda}_2 = 0$, то $\hat{m}(y) = \sum_{j=0}^N \mu_j y_j e_j$ – оптимальный метод.

Частный случай приведенного здесь результата рассмотрен в работе [1], а его непрерывный аналог, т.е. для функций, заданных на прямой, исследован в [2].

Список литературы

1. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, вып.3 – С.79–100.

2. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных. // Функц. анализ и его прилож. – 2003. – Т. 37. – С. 51–64.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕПЛОФИЗИКЕ, АКУСТИКЕ И ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ, И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Н.А. Раутиан¹⁾, В.В. Власов²⁾

¹⁾ Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова

²⁾ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Ряд задач теории вязкоупругости, акустики сильнонеоднородных сред, фильтрации жидкости в пористой среде, теплофизики, кинетической теории приводят к необходимости анализа разрешимости, гладкости решений, единственности решений, а также спектральных свойств интегродифференциальных уравнений с нелокальными членами типа свертки. Перечисленные задачи естественным образом приводят к изучению интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах.

Модельными примерами могут служить начально-краевые задачи для волнового уравнения возмущенного интегральным оператором вольтерровой свертки по временной переменной. Качественные свойства решений такого уравнения в значительной степени зависят от свойств функции, являющейся ядром свертки. Различные задачи механики и теплофизики приводят к следующему виду функции $K(t)$:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \quad c_j > 0, \quad \gamma_{j+1} > \gamma_j > 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \gamma_j \rightarrow +\infty, \quad K(0) < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty, \quad (1)$$

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \quad c_j > 0, \quad \gamma_{j+1} > \gamma_j > 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \gamma_j \rightarrow +\infty, \quad K(0) < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j = \infty, \quad (2)$$

$$K(t) = \alpha \delta(t) + c^2 + Q(t), \quad Q(t) = \int_{-\Lambda_1}^{\Lambda_2} e^{\lambda t} d\mu(\lambda), \quad (3)$$

где $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$ - постоянные, $\mu(\lambda)$ - мера Стильтьеса с носителем на отрезке $[-\Lambda_1, -\Lambda_2]$, α, c - также постоянные, $\delta(t)$ - дельта-функция.

Уравнение с ядром вида (1) возникает как уравнение распространения звуковой волны в смеси (эмульсии) двух жидкостей, когда функция плотности суспензии непрерывна; уравнение с ядром вида (2) возникает, когда функция плотности является разрывной функцией, т.е. граница между двумя фазами эмульсии является «резкой», а не «размытой», как в случае (1). Уравнение с ядром вида (3) возникает как усредненная (или «эффективная») модель

сильнонеоднородной среды, состоящей из упругого «каркаса» и вязкой жидкости с конечным коэффициентом вязкости. Сам по себе вывод указанных уравнений представляет собой отдельную задачу.

В наших работах [16], [17] изучаются интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы с ядром вида (1) и (2). Эти уравнения представляют собой абстрактную форму упомянутых выше интегродифференциальных уравнений (подробнее см. [7], [8]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью, процесс распространения звука в вязкоупругих средах, а также возникают в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси).

Устанавливается корректная разрешимость начально-краевых задач для указанных уравнений в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси.

Анализируются спектральные вопросы для оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Спектральный анализ случаев (1) и (2), проведенный в работах [14]-[17], показывает, что спектр собственных колебаний сред, описываемых указанными моделями, состоит из двух частей - вещественной и комплексной. Вещественная часть соответствует собственным движениям среды без колебаний, комплексным же собственным значениям соответствуют затухающие колебания. Вещественная часть представляет собой объединение бесконечного числа «серий» с конечными пределами, а комплексная - объединение двух комплексносопряженных серий.

Заметим, что рассмотренные в работе интегродифференциальные уравнения были выведены в работе [7] и, видимо, после этого были названы уравнениями Гуртина-Пипкина.

В последнее годы значительно возрос интерес к изучению интегродифференциальных уравнений. Работы [1] – [5] (см., также, указанную там литературу) посвящены изучению интегродифференциальных уравнений, главная часть которых представляет собой абстрактное параболическое уравнение. Значительно меньше работ посвящено исследованию уравнений, главная часть которых - абстрактное гиперболическое уравнение. Наиболее близкими к данной проблематике являются работы [5], [7], [8], [10], [15].

Отметим также, что главное отличие полученных результатов о разрешимости от уже известных результатов (см., например, [7], [8]) состоит в том, что мы допускаем наличие особенностей (интегрируемых) у ядер вольтерровых интегральных операторов. В указанных выше работах, посвященных уравнениям гиперболического типа, накладываются более жесткие требования на ядра интегральных операторов. Ситуация с уравнениями параболического типа принципиально иная, так как в этом случае ограничения, налагаемые на ядра интегральных операторов, существенно менее жесткие (см. [1] – [5]).

Следует обратить внимание на то, что наш метод доказательства теоремы о корректной разрешимости начально-краевой задачи для абстрактного уравнения Гуртина-Пипкина, существенно отличается от подхода, использованного Л. Пандолфи в [8]. Л. Пандолфи изучает разрешимость в функциональных пространствах, заданных на конечном интервале $(0, T)$ по временной переменной t , в то время, как в предлагаемой работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси.

При доказательстве теоремы о разрешимости мы существенно используем гильбертову структуру пространств $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ и $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ (см. [6]) и теорему Пэли-Винера, в то время, как в работе [8] рассмотрения проводятся в банаховых пространствах функций на конечном интервале $(0, T)$ по временной переменной.

При изучении спектральных вопросов мы изучаем интегродифференциальные уравнения с ядрами интегральных операторов, имеющих особенности и возникающих в сильно неоднородных средах (закон Дарси) $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$. Спектральные вопросы для уравнения Гуртина-Пипкина изучались в работах [8] - [15] при различных условиях на ядро $K(t)$.

На основе результатов о локализации спектра оператор-функций, являющихся символами уравнений, получено представление решений в виде суммы двух слагаемых, первое из которых отвечает за волновой характер, а второе - отвечает спектру оператор-функции, лежащему на отрицательной вещественной полуоси.

Список литературы

1. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* // Journal. Math. Anal. Appl, 1984, V.102, P. 38-57.
2. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. // Appl. Math. Sci. - New York: Springer-Verlag, 1996, V.119.
3. *Власов В. В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. // Матем. сб. - 1995. - Т.186 - №8. - С. 67-92.
4. *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева. // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. - 1999. - Т.227 - С. 109-121.
5. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории. // Современная математика. Фундаментальные направления. - 2008. - Т.30 - С. 3-173.
6. *Лионс Ж. П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М. 1971.

7. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed. // Arch. Rat. Mech. Anal, 1968, V.31, P. 113-126.
8. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach. // Appl. Math. Optim, 2005, V.52, P. 143-165.
9. *Космодемьянский Д. А., Шамаев А. С.* О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью. // Современная математика. Фундаментальные направления. - 2006. - Т.17 - С. 88-109.
10. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest. // Jornal of Mathematical analysis and applications, 2009, V. 355, P. 1-11.
11. *Ivanov S. A., Sheronova T. L.* Spectrum of the heat equation with memory. //arXiv;http://arxiv.org/abs/0912.1818v1.
12. *Ivanov S. A.* 'Wave type' spectrum of the Gurtin-Pipkin equation of the second order. // arXiv;http://arxiv.org/abs/1002.2831.
13. *Санчес. Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. - М. Мир, 1984.
14. *Власов В.В., Ву Дж.* Спектральный анализ и разрешимость абстрактных гиперболических уравнений с последствием. // Дифференциальные уравнения. - 2009. – Т.45 - №4. - С. 524-533.
15. *Власов В. В., Ву Дж., Кабирова Г. Р.* Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнения с последствием. // Современная математика. Фундаментальные направления. - 2010. – Т.35 - С. 44-59.
16. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. - 2010. - (принята к печати).
17. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике.// Доклады РАН. - 2010. – Т.434 - №.1 - С. 12-15.

КВАЗИОДНОРОДНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

П.С. Саркисян

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В работе [1] были рассмотрены струны с кусочно-постоянной плотностью $a(x)$, с закрепленными концами, спектр колебаний которых совпадает со спектром однородной задачи

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda \cdot a^2 \cdot Y \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Струны обладающие такими качествами названы квазиоднородными.

Задавая параметр плотности, так что $a(x) = a_k$, на интервале $x \in (c_k, c_{k+1})$, $k = 1, \dots, n$ для задачи (1), можно получить условия квазиоднородности, в виде простых алгебраических соотношений:

для нечетных m , $1 < m \leq n$, величины $\frac{1}{C_n^m} \sum_{k: 1 < k \leq m} \frac{a_{k2} \cdots a_{km-1}}{a_{k1} \cdot a_{k3} \cdots a_{km}}$ равны между собой.

Полученные соотношения не дают ответа на вопрос как рациональным способом отыскивать n -звенные квазиоднородные струны. Решение этой задачи дается с помощью рационального алгоритма [2], позволяющего по части струны, заданной параметрами $a_1, a_2, \dots, a_p$, получать квазиоднородные струны $a_1, \dots, a_n$ с помощью матриц, имеющих свойства производящих функций.

В следующей работе понятие квазиоднородности переносится на канонические системы 1-го порядка.

Исходная система уравнений данных канонической системы преобразуется к виду

$$\begin{cases} Y' = \lambda \cdot S_k \cdot Y, & x \in (c_k, c_{k+1}); \\ S_k = \begin{pmatrix} -b_k & -c_k \\ a_k & b_k \end{pmatrix}; \\ k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

В соответствующей однородной канонической системе матрицы S_k равны одной и той же постоянной матрице.

Условие квазиоднородности (случай нечетного n) выражается в виде соотношения

$$\text{tr } P(t) = (1 + it)^n + (1 - it)^n, \quad (3)$$

где

$$P(t) = \prod_{k=1}^n (I + tS_k). \quad (4)$$

Для канонической системы получение условий квазиоднородности в простом явном виде (условий на (a_k, b_k, c_k)), как в задаче о квазиоднородной струне, не представляется возможным.

Условие (1) вместе с естественными свойствами матрицы $P(t)$ (свойствами по построению следующие из (4)), задает класс матриц называемых *отмеченными*.

Задача построения квазиоднородных канонических систем разбивается на две подзадачи:

1. Задача определения матрицы $P(t)$, с элементами в виде многочленов, удовлетворяющей условиям отмеченности.
2. Задача о факторизации: получение по заданной матрице $P(t)$ набора матриц $S_1, S_2, \dots, S_n$ (удовлетворяющих соотношению (4)).

Обе задачи оказываются разрешимыми и, более того, алгоритм получения квазиоднородной канонической системы выражается рациональными преобразованиями.

Обозначим

$$P_n(t) = \begin{pmatrix} W & Q \\ G & T \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Первая подзадача (отыскания самой матрицы $P(t)$) сводится к задаче по отысканию многочленов W, Q, G, T .

Требование выполнения свойств отмеченности матрицы $P(t)$ приводит к алгебраической задаче для многочленов W, Q, G, T . Такая задача решается стандартными методами (алгоритм Евклида).

Вторая подзадача решается следующим образом. Имея матрицу вида (5), получаем по ней матрицу

$$S_n = \frac{1}{\operatorname{Im}(W(i) \cdot \overline{G(i)})} \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(W(i) \cdot \overline{G(i)}) & -W(i) \cdot \overline{W(i)} \\ -G(i) \cdot \overline{G(i)} & \operatorname{Re}(W(i) \cdot \overline{G(i)}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$P_{n-1}(t) = \frac{1}{1+t^2} (1-tS_n) \cdot P_n(t). \quad (7)$$

Продолжая процесс, применяем преобразование (6), (7) к $P_{n-1}(t)$, затем к $P_{n-2}(t)$ и т.д.; получаем последовательность матриц $S_n, S_{n-1}, \dots, S_1$.

Список литературы

1. *Р.С. Исмагилов, П.С. Саркисян. О квазиоднородных струнах. // Математические заметки т. 78, август 2005г., в. 2, стр. 317-320.*
2. *П.С. Саркисян. Восстановление квазиоднородных струн. // Математические заметки т. 82, июль 2007г., в. 1, стр. 125-134.*

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ И В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э.Р. Смольяков

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

В данной работе на основе созданной в 2008-2010 годах «Экстремальной теории размерностей» [1-5] получены радикально новые результаты для классической задачи двух тел, а именно: неизвестный до сих пор закон движения и определяющее его неизвестное уравнение, а также удивительные орбиты в гравитационных полях, каждая из которых частично находится в нашем пространстве, а частично - в двойственном к нему пространстве [6-11].

Сомневаться же в истинности экстремальной теории размерностей не имеется никаких оснований, во-первых, потому, что на ее основе уже удалось вывести все известные на сегодня уравнения динамики и законы физики, которым эти уравнения подчиняются, и во-вторых, потому, что она основана

только на двух абсолютно надежных источниках - понятиях экстремума и размерной величины.

Специфику поиска уравнений задачи двух тел и их решений с помощью экстремальной теории размерностей продемонстрируем, воспользовавшись следующим представлением времени t через возможные параметры движения:

$$t = C G^k M_0^m r^l \dot{r}^n \ddot{r}^p (r^{(3)})^q, \dots, \quad (1)$$

где C - неизвестная безразмерная величина (не обязательно вещественная); G - гравитационная постоянная, имеющая размерность в гауссовой системе единиц $[L^3/(MT^2)]$; M_0 - масса тела (создающего гравитационное поле) размерности $[M]$; r - величина радиус-вектора (размерности $[L]$) тела, движущегося в центральном гравитационном поле; $\dot{r}$ - скорость изменения величины радиус-вектора размерности $[L/T]$; далее в разложении (1) располагаются высшие производные от r очевидной размерности.

Запишем уравнение (1), к примеру, в основных размерностях гауссовой системы единиц [СГС] (сантиметр, грамм, секунда):

$$[T] = [L^3/(MT^2)]^k [M]^m [L]^l [L/T]^n [L/T^2]^p [L/T^3]^q, \dots$$

Приравнявая размерности с обеих сторон этого равенства, получаем следующую систему трёх линейных уравнений относительно множества неизвестных показателей степеней:

$$\begin{aligned} 0 &= 3k + l + n + p + q + \dots, \\ 0 &= -k + m, \\ -1 &= 2k + n + 2p + 3q + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

определяя из которой любые три показателя степени через остальные, получаем, например:

$$\begin{aligned} k &= m, \\ l &= 1/2 - 2m - n/2 + q/2 + \dots, \\ p &= -1/2 - m - n/2 - (3/2)q + \dots \end{aligned}$$

В результате разложение (1) принимает вид

$$t = C G^m M_0^m r^{((1/2)-2m-n/2+q/2+\dots)} \dot{r}^n \ddot{r}^{(-(1/2)-m-n/2-(3/2)q+\dots)} r^{(3)q} \dots \quad (3)$$

Логарифмируя выражение (3) и приравнявая нулю частные производные от $\lg t$ по $m, n, q, \dots$ (т.е. определяя особые экстремали $[1=5]$), приходим к следующему множеству экстремальных уравнений, первое из которых является классическим (см. (9.16) и (10.75) из [12]), определяющим изменение радиуса $r(t)$ на любых известных орбитах [12, с. 509]:

$$\ddot{r}r^2 = GM_0, \quad (4)$$

$$\ddot{r}r = \dot{r}^2, \quad (5)$$

$$r(r^{(3)})^2 = \dot{r}^3, \dots, \quad (6)$$

а подстановка экстремалей (4)-(6) в разложение (3) приводит к следующему представлению решения

$$t = C \dot{r}^{-1/2} r^{1/2}, \quad (7)$$

определяющего (с учётом экстремалей) огибающую семейства экстремалей, принимающую, с учетом (4), вид третьего закона Кеплера:

$$t = C\sqrt{r^3/(GM_0)} \quad (8)$$

Заметим, что уравнения экстремалей (5) и (6) определяют лишь два из бесконечного множества следующих удивительных нелинейных дифференциальных уравнений свободного движения, (именно свободного, поскольку эти уравнения содержат только инерциальные переменные $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots$, т.е. состояние $r(t)$ и производные от него):

$$\ddot{r}^{k+1} = \dot{r}^k r^{(k+2)}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Решением этих экстремальных уравнений является, в частности, трехпараметрическое семейство экспонент $r(t) = K_1 e^{(C_1 t)} + K_2$. Как доказано в [3, 5], это семейство экстремалей имеет обобщения, удовлетворяющие уравнениям

$$\ddot{r}^{k+1} = r^k \dot{r}^{(k+1)}, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

решением которых является, в частности, двухпараметрическое семейство экспонент $r = K_1 e^{C_1 t}$, движение по которым характеризуется следующими удивительными свойствами. Во-первых, в любой момент t и при любой скорости $\dot{r}$ обеспечивается компенсация инерциального ускорения $\ddot{r}$ высшими производными по закону $r^{(k+2)} = \ddot{r}^{k+1} / \dot{r}^k$. Во-вторых, произвольный объект на этих траекториях не подвержен воздействию времени (сохраняется неизменным). В-третьих, время в системе координат, связанной с движущимся объектом, останавливается.

Уравнения (5) и (6) свободного движения хотя и кажутся не имеющими прямого отношения к задаче движения в гравитационном поле, но, однако, всегда являются источником дополнительной информации об изучаемом процессе, которую, как правило, невозможно получить из интуитивных соображений. В данном случае, например, подстановка r из (5) в (4) приводит к неизвестному уравнению $\ddot{r}^4 = GM_0 \ddot{r}$, найденному в [1, 4, 5], решением которого являются специфические параболические орбиты в гравитационном поле, анализируемые ниже.

В классической механике [12, с. 453, 509] известно только уравнение (4) и неизвестны уравнения (5)-(8). Общее решение уравнения (4) (в котором обозначим $GM_0 = -\mu$, где $\mu > 0$), как известно [12, с. 509], задается следующими тремя частными решениями, определяющими при разных значениях произвольной постоянной h , соответственно, гиперболические (формула (10.77) из [12] при $h > 0$), эллиптические (формула (10.78) из [12] при $h < 0$) и параболические орбиты (формула (10.76) из [12] при $h = 0$):

$$\pm(t - t_0) = \frac{\mu}{h\sqrt{h}} \left[\sqrt{(2\mu + hr)} / \mu - 2 \ln(\sqrt{2\mu + hr} + \sqrt{hr}) \right]_0^r; \quad (11)$$

$$\pm(t - t_0) = \frac{\mu}{h\sqrt{-h}} \left[\sqrt{(2\mu + hr)(-hr)} / \mu - 2 \arcsin \sqrt{(-hr)/(2\mu)} \right]_0^r; \quad (12)$$

$$r(t) = \left[r_0^{3/2} \pm 3\sqrt{\mu}(t - t_0) / \sqrt{2} \right]^{2/3}. \quad (13)$$

Однако классическое решение (11)-(13) - это всего лишь решение уравнения (4) без учета уравнений (5)-(8) (т.е. без учёта факта существования или отсутствия огибающей). Убедимся в существовании огибающей,

подставляя по очереди экстремальные решения (11)-(13) в выражение (8), определяющее разыскиваемое решение. Для пары уравнений (8), (13) проще всего это сделать, сравнивая производные по времени от этих уравнений. В результате получаем, что существует константа $C = \frac{\sqrt{2}}{3}i$, где i – мнимая

единица. А поскольку константа C оказалась мнимой, то это указывает на зависимость параболических орбит от двойственного пространства X^* .

А вот подстановка экстремальных решений (11) и (12) в выражение для общего решения (8) приводит к мнимой функции $iC(r)$ (не являющейся константой), что указывает не только на зависимость этих решений от двойственного пространства, но и на какую-то их особенность по сравнению с решением (13).

Уместно отметить также, что в [12] решения (11)-(13) представлены лишь как вырожденные решения для каждой из трёх видов орбит, определяющие прямолинейные перемещения вдоль радиуса. Однако в действительности эти решения определяют радиальные изменения положения тела, движущегося по любой из трёх типов орбит и, лишь в частности, определяют также и вырожденные решения.

Интересно отметить, что экстремальная теория размерностей позволяет найти не только классическое решение (11)-(13) (с выяснением условий его законности), но и следующее неизвестное экстремальное уравнение движения в гравитационном поле (уравнение (37) из [3]):

$$\dot{r}^4 = (CG_0)\ddot{r}, \quad (14)$$

решением которого является функция

$$r = \frac{|GM_0|}{2} \left\{ \left[\left(\frac{2r_0}{|GM_0|} - 2C_1 \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \pm \frac{3}{GM_0} (t - t_0)^{\frac{2}{3}} + 2C_1 \right\}. \quad (15)$$

При различных значениях параметра $C_1 = \frac{r_0}{|GM_0|} - \frac{1}{2\dot{r}_0^2}$, реализуются радикально разные орбиты. В случае $C_1 \leq 0$ имеет место семейство параболических орбит, из которого особо выделяются орбиты, получающиеся при $C_1 = 0$ и совпадающие с решением (13) уравнения (4), если в этом последнем вместо параметра GM_0 использовать параметр $GM_0/4$, т.е. вчетверо уменьшить массу гравитирующего тела. А в случае $C_1 > 0$ из множества решений уравнения (14) выделяются «экзотические» параболические орбиты, удалённые от перигея «ветви» которых реализуются в нашем пространстве X , а участки этих орбит в окрестности перигея – в двойственном пространстве X^* , [7-9].

При поиске новых уравнений движения, законов движения и фундаментальных констант с помощью экстремальной теории размерностей полезно учесть следующее обстоятельство. При выводе уравнений можно ожидать появления в качестве экстремалей тех или иных уравнений из систем

(9) и (10), причём не всегда допустимо не учитывать их как не имеющих никакого отношения к изучаемой задаче, как это было сделано в задаче (1)-(8). К примеру, если в системе (2) выразить не k, l, p через остальные степени, а решить эту систему относительно k, l, n : $k = m$, $l = 1 - m + p + 2q$, $n = -1 - 2p - 2m - 3q$, то это не изменит вид решения (8), а вот экстремали примут вид

$$r\ddot{r}^2 = GM_0, \quad (16)$$

$$r\ddot{r} = \dot{r}^2, \quad (17)$$

$$r^2 r^{(3)} = \dot{r}^{(3)}. \quad (18)$$

В этом случае экстремальное уравнение (17), являясь формально одним из уравнений свободного движения (10), не может быть проигнорировано, поскольку оно играет роль некоторой «кинематической связи», без которой математическая модель задачи двух тел оказывается не вполне определенной в том смысле, что без учета уравнения (17) уравнение (16) представляет собой лишь частный первый интеграл уравнения (4), который только в паре с уравнением (17) (при подстановке $\dot{r}^2$ из (17) в (16) или r из (17) в (16)) приводит к уравнениям (4) и (14), а следовательно, и ко всем полученным выше результатам.

Таким образом, помимо законов Кеплера и Ньютона, которые следуют из уравнений (5), (8) и (16), в гравитационном поле действует, по-видимому, ещё и закон, задаваемый уравнением (14), утверждающий, что «инерциальное ускорение тела в центральном гравитационном поле пропорционально четвертой степени от его скорости и обратно пропорционально массе центра гравитации», и указывающий на возможность существования семейства параболических орбит, некоторое подсемейство которого характеризуется тем, что его орбиты не находятся в пространстве X целиком: одна часть каждой из таких орбит реализуется в X , а другая часть - в X^* .

Отсюда следует, к примеру, что если тело, летящее в нашем пространстве по «экзотической» орбите (15) в гравитационном поле Солнца массой $M_0 = 1,99 \cdot 10^{33}$ г, имеет на расстоянии $r_0 \sim 200$ млн км от него радиальную скорость сближения с ним $\dot{r}_0 \sim 40$ км/с (в этом случае параметр C_1 его орбиты оказывается положительным), то при сближении с ним на расстояние менее ~ 160 млн км оно переходит в двойственное пространство X^* и становится ненаблюдаемым в X еще задолго до своего перицентра. Снова оно становится наблюдаемым в X только после прохождения через свой перицентр и удаления от центра тяготения на расстояние более ~ 160 млн км. Так что человечеству больше следует бояться астероидов на подобных орбитах, чем на известных нам орбитах классического уравнения (4).

Работа выполнена по программе "Фундаментальные основы информационных технологий и систем" РАН, проект N 1-3, и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00655а).

Список литературы

1. Э.Р. Смольяков. Особые экстремали в анализе размерностей // ДАН. 2008. Т. 421, N 5. С. 602-606.
2. Э.Р. Смольяков. Принцип экстремальности в теории размерностей и новые фундаментальные физические постоянные // «Динамика неоднородных систем». Труды Института системного анализа РАН. 2008. Т. 33. Вып. 12. С. 78-95.
3. Э.Р. Смольяков. Методы поиска дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. N 12. С. 1704-1715.
4. Э.Р. Смольяков. Использование особых экстремалей для получения новых уравнений движения и неизвестных констант // Кибернетика и системный анализ. 2009. N 4. С. 115-124.
5. Э.Р. Смольяков. Экстремальная теория размерностей и вывод дифференциальных уравнений движения // ДАН. 2009. Т. 429, N 6. С. 750-753.
6. Э.Р. Смольяков. Нелинейные законы движения и обоснование движения инерцидов // ДАН, 2003. Т. 393. N 6. С. 770-775.
7. Э.Р. Смольяков. Теоретическое обоснование межзвёздных полётов. М.: КомКнига. 2005.
8. Э.Р. Смольяков. Динамика и энергетика переходов между двойственными пространствами // ДАН. 2006. Т. 406. N 6. С. 734-737.
9. Э.Р. Смольяков. Интегралы движения в двойственном пространстве. // ДАН. 2007. Т. 414, N 4. С. 459-463.
10. Э.Р. Смольяков. Вариационные уравнения электродинамики // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, N 4. С. 475-480.
11. Э.Р. Смольяков. Теория движения электрически заряженных массивных тел в пространстве Минковского и двойственном к нему // «Динамика неоднородных систем». Труды Института системного анализа РАН. 2007. Том 29. Вып. 11. С. 85-117.
12. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 1968.

ТЕОРИЯ ПОИСКА НЕИЗВЕСТНЫХ ЗАКОНОВ ПРИРОДЫ И НОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Э.Р.Смольяков

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Созданная в 2008-2010 гг. экстремальная теория размерностей [1-5] позволила найти общую формулу, определяющую все известные и еще неизвестные фундаментальные постоянные и позволила чрезвычайно просто находить (исключительно математическим путем) динамические уравнения любых процессов без использования каких-либо допущений и без знания законов, которым эти уравнения подчиняются. С ее помощью удалось найти,

не используя никаких физических законов, как множество известных к настоящему времени формул и дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), так и радикально новые неизвестные уравнения [1-4], имеющие удивительные решения.

Обнаружить совершенно неожиданные связи между динамикой в гравитационных полях и электродинамикой и новые уравнения, которые невозможно найти традиционными методами физики и механики, опирающимися на известные законы механики и электродинамики, позволяет, к примеру, следующее представление движения $r(t)$ (где $r(t)$ - модуль радиус-вектора $\vec{r}(t)$ некоторой электрически заряженной "пробной" массы или «пробного» электрического заряда e в поле, соответственно, другой электрически заряженной массы M_0 или электрического заряда Q) в виде зависимости времени движения t от произведения следующих величин: массы M_0 , гравитационной постоянной G , суммарного электрического заряда Q (положительного или отрицательного, представляющего собой сумму элементарных электрических зарядов электрона ($-e$) и (или) позитрона ($+e$)), величины радиус-вектора $r(t)$, скорости его изменения $\dot{r}$ и ускорения $\ddot{r}$:

$$t = CG^k M_0^m Q^n r^p \dot{r}^q \ddot{r}^s, \quad (1)$$

где C - неизвестная безразмерная величина, не обязательно вещественная.

Запишем уравнение (1) в основных размерностях гауссовой системы единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда):

$$[L] = [L^3 / MT^2]^k [M]^m [L^{3/2} M^{1/2} / T]^n [L]^p [L / T]^q [L / T^2]^s. \quad (2)$$

Приравнявая размерности с обеих сторон этого равенства, получаем систему из трех линейных алгебраических уравнений с 6 неизвестными степенями, решая которую относительно любых трех степеней, например, k , m и q , находим

$$\begin{aligned} k &= 1 - n/2 - p + s, \\ m &= 1 - n - p + s, \\ q &= -3 + 2p - 4s. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя значения (3) в уравнение (1), получаем разложение

$$t = CG^{(1-n/2-p+s)} M_0^{(1-n-p+s)} Q^n r^p \dot{r}^{(-3+2p-4s)} \ddot{r}^s. \quad (4)$$

Логарифмируя равенство (4) и вычисля частные производные по n , p , s , находим следующие три экстремальных уравнения

$$Q = M_0 \sqrt{G}, \text{ или, что то же самое, } Q\sqrt{G} = GM_0, \quad (5)$$

$$GM_0 = r\dot{r}^2, \quad (6)$$

$$GM_0 \ddot{r} = \dot{r}^4. \quad (7)$$

Совместно уравнения (6) и (7) определяют все возможные решения задачи двух тел. Уравнение (7), определяющее неизвестное в классической механике [12] семейство орбит, впервые было найдено и изучено в [1, 3, 5], а все классические решения находятся из решения уравнения

$$r^2 \ddot{r} = GM_0, \quad (8)$$

которое получается подстановкой $\dot{r}^2$ из (6) в (7).

Подставляя экстремали (5)-(7) в разложение (4), получаем следующее общее представление решения рассматриваемой задачи через экстремальные постоянные и переменные:

$$t = CGM_0 / \dot{r}^3, \quad (9)$$

которое в силу уравнения (6) можно записать в виде Третьего закона Кеплера:

$$t = C\sqrt{r^3 / (GM_0)}, \quad (10)$$

В силу экстремали (5) рассматриваемая динамическая система (1) приводит еще и к следующим экстремальным уравнениям, описывающим движение не масс, а электрически заряженных тел в центральном поле заряда Q :

$$Q\sqrt{G} = r\dot{r}^2, \quad (6a)$$

$$Q\sqrt{G}\ddot{r} = \dot{r}^4. \quad (7a)$$

Поскольку эти уравнения отличаются от уравнений (13) и (14) только константой, то и задача движения «пробного» электрического заряда в центральном поле заряда Q ничем не отличается от задачи двух тел небесной механики и для нее справедливы следующие уравнения, аналогичные уравнениям (8)-(10):

$$r^2\ddot{r} = Q\sqrt{G}, \quad (8a)$$

$$t = CQ\sqrt{G} / \dot{r}^3, \quad (9a)$$

$$t = C\sqrt{r^3 / (Q\sqrt{G})}. \quad (10a)$$

Так как уравнения (7) и (7a) - это по существу одно и то же уравнение, в котором изменяется только константа, определяющая физический смысл действующих сил, то все результаты, касающиеся задачи движения в гравитационном поле (6)-(10), переносятся и на задачу (6a), (7a) движения в поле электрически заряженного тела.

Таким образом, исходное разложение (1) дает решение по существу двух разных задач: задачи (6)-(10) движения масс в гравитационных полях [3-5, 12], и задачи (6a)-(10a) движения электрически заряженных тел в центральном поле заряда Q . Заметим, что обе эти задачи могут быть получены также и из рассмотрения порознь разложений, которые получаются из разложения (1), соответственно, при $n=0$ и $m=0$.

Подчеркнем, что уравнение (7), найденное в [1, 3, 5], определяет совершенно новый, неизвестный тип движения в гравитационных полях и содержит в себе в качестве частного случая параметрическое семейство параболических орбит, каждая из которых частично находится в пространстве Минковского X , а частично - в двойственном к нему пространстве X^* , введенном в рассмотрение и изученном в [6-11]. Заметим, что если $GM_0 = Q\sqrt{G}$, то в гравитационном поле тела M_0 и в электрическом поле заряда Q реализуются тождественные семейства орбит, включая орбиты с выходом в двойственное пространство Минковского X^* . В общем случае, если тела в гравитационных полях обладают еще и достаточно большими электрическими зарядами, то их движение может существенно возмущаться ускорением, порождаемым законами (7a) и (8a).

Рассмотрим еще один пример. Из электротехники известно [13], что уравнение изменения тока I в цепи, состоящей из активного сопротивления (резистора) R , индуктивности L_0 и конденсатора C_0 , под влиянием подаваемого в эту цепь напряжения $U(t)$ описывается (в Международной системе единиц СИ) уравнением [13, с. 68]:

$$U(t) = Q(t)/C_0 + RI + L_0 dI/dt, \quad (11)$$

где ток I определяется через электрический заряд $Q(t)$ равенством $dQ/dt = I$.

Попытаемся с помощью экстремальной теории размерностей вывести не только это уравнение, но и более точное и неизвестное до сих пор его обобщение, а также основные физические формулы, имеющие отношение к этому процессу. Воспользуемся следующим разложением, учитывающим интересующие нас величины:

$$U(t) = CR^k L_0^l C_0^m I^n \dot{I}^p \ddot{I}^q Q^r E^s H^v \mu_0^w, \quad (12)$$

где C - неизвестная безразмерная величина, Q - электрический заряд, прошедший по цепи, $I = \dot{Q}$ - ток в цепи $\dot{I} = \dot{Q}$, $\ddot{I} = \ddot{Q}^{(3)}$, E - напряженность электрического поля, H - напряженность магнитного поля, μ_0 - магнитная проницаемость. Запишем уравнение (12) в основных размерностях Международной системы единиц СИ, в которой в число основных единиц размерности вводится сила тока I :

$$[L^2 M / (T^3 I)] = [ML^2 / (T^3 I^2)]^k [ML^2 / (T^2 I^2)]^l [T^4 I^2 / (ML^2)]^m [I]^n [I / T]^p [I / T^2]^q [IT]^r [LM / (T^3 I)]^s [I / L]^v [LM / (T^2 I^2)]^w. \quad (13)$$

Из сравнения размерностей в этом равенстве получаем систему из четырех алгебраических уравнений с 10 неизвестными степенями, решая которую относительно k, l, n и s , находим

$$\begin{aligned} k &= I + 2m - p - 2q + r + v - w, \\ l &= -m + p + 2q - r - w, \\ n &= I - p - q - r - w, \\ s &= w - v. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя значения (14) в уравнение (12), получаем разложение

$$U = CR^{(I+2m-p-2q+r+v-w)} L_0^{(-m+p+2q-r-w)} C_0^m I^{(I-p-q-r-w)} \dot{I}^p \ddot{I}^q Q^r E^{(w-v)} H^v \mu_0^w. \quad (15)$$

Логарифмируя равенство (15) и вычисляя частные производные по m, p, q, r, v, w , находим следующие шесть экстремальных уравнений

$$R^2 C_0 = L_0, \quad (16)$$

$$L_0 \dot{I} = IR, \quad (17)$$

$$L^2 \ddot{I} = R^2 I, \quad (18)$$

$$QR = L_0 I, \quad (19)$$

$$E = HR, \quad (20)$$

$$\mu_0 E = L_0 IR, \quad (21)$$

Подставляя экстремали (16)-(21) в разложение (15), получаем следующее общее представление решения рассматриваемой задачи через экстремальные постоянные и переменные:

$$U=CIR, \quad (22)$$

причем с учетом принятой в электротехнике нормировки закона Ома [13] в этом равенстве должно быть $C=1$.

Поскольку общее решение (22) несовместимо одновременно со всеми экстремальными, а совместимо лишь с некоторыми из них, то следует ожидать, что уравнение (12) (а следовательно, и (22)) состоит из аддитивных членов, каждый из которых определяется совместимостью этого последнего с одним из экстремальных уравнений, причем уже сама правая часть уравнения (22) задает один из этих аддитивных членов, а именно:

$$U_1=IR. \quad (23)$$

Остальные члены находятся следующим образом. Экстремальное уравнение (10) в силу (15) определяет падение напряжения на индуктивности в каждый момент t , вызванное скоростью изменения тока; в самом деле, имеем:

$$U_2 = IR = \dot{I}L_0. \quad (24)$$

Экстремальное уравнение (18) в силу (22) задает величину напряжения $U_3(t)$ в каждый момент t на индуктивности и резисторе под влиянием ускорения силы тока в цепи:

$$U_3 = IR = \ddot{I}L_0^2 / R, \quad (25)$$

уравнение (19) в силу (22) и (16) определяет напряжение U_0 на конденсаторе:

$$U_0 = IR = QR^2 / L_0 = Q / C_0, \quad (26)$$

а уравнение (21) определяет напряжение, порождаемое электрическим полем E :

$$U_4 = IR = \mu_0 E / L_0. \quad (27)$$

В результате получаем, что в рассматриваемой задаче общее решение (12) (или (22)) имеет вид следующего дифференциального уравнения

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \\ Q / C_0 + IR + \dot{I}L_0 + \ddot{I}L_0^2 / R + \mu_0 E / L_0, \quad (28)$$

содержащего в себе классическое уравнение (11) в случае $\ddot{I} \approx 0$ и $E \approx 0$ и описывающего процессы в электрических цепях, вероятно, с гораздо большей точностью, чем это обеспечивают первые три его правых члена, совпадающие с правой частью классического уравнения (11). Экстремали же (16) и (20) задают фундаментальные формулы электротехники.

И еще заметим, что экстремали (17)-(19) естественным образом содержат в себе также и некоторые из новых необычных уравнений свободного движения, открытых в работах [1-3, 5] и присущих любым динамическим системам. В самом деле, из уравнений (17)-(19) следуют уравнения $Q^{(3)}\dot{Q} = \ddot{Q}^2, \dot{Q}^2 = Q\ddot{Q}, \ddot{I} = I^2$, являющиеся частью следующих общих систем уравнений [1-3, 5]: $\ddot{x}^{k+1} = \ddot{x}^k x^{(k+2)}, \dot{x}^{k+1} = x^k x^{(k+1)}, k=1,2,3,...$, указывающих на существование специфического вида свободного движения, при котором скорости и ускорения изменяются, а инерциальные перегрузки самокомпенсируются за счет высших производных, причем "внутреннее" время, связанное с объектом, останавливается.

Таким образом, экстремальная теория размерностей позволяет в любой области естественных наук найти все (как уже известные, так и еще неизвестные) формулы, дифференциальные уравнения и законы, управляющие процессами, в любом приближении, зависящем только от числа учитываемых в анализе параметров и переменных.

Работа выполнена по программе "Фундаментальные основы информационных технологий и систем" РАН, проект N 1-3, и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00655а).

Список литературы

1. Э.Р. Смольяков. Особые экстремали в анализе размерностей // ДАН. 2008. Т. 421, N 5. С. 602-606.
2. Э.Р. Смольяков. Принцип экстремальности в теории размерностей и новые фундаментальные физические постоянные // «Динамика неоднородных систем». Труды Института системного анализа РАН. 2008. Т. 33. Вып. 12. С. 78-95.
3. Э.Р. Смольяков. Методы поиска дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. N 12. С. 1704-1715.
4. Э.Р. Смольяков. Использование особых экстремалей для получения новых уравнений движения и неизвестных констант // Кибернетика и системный анализ. 2009. N 4. С. 115-124.
5. Э.Р. Смольяков. Экстремальная теория размерностей и вывод дифференциальных уравнений движения // ДАН. 2009. Т. 429, N 6. С. 750-753.
6. Э.Р. Смольяков. Нелинейные законы движения и обоснование движения инерциалов // ДАН, 2003. Т. 393. N 6. С. 770-775.
7. Э.Р. Смольяков. Теоретическое обоснование межзвёздных полётов. М.: КомКнига. 2005.
8. Э.Р. Смольяков. Динамика и энергетика переходов между двойственными пространствами // ДАН. 2006. Т. 406. N 6. С. 734-737.
9. Э.Р. Смольяков. Интегралы движения в двойственном пространстве. // ДАН. 2007. Т. 414, N 4. С. 459-463.
10. Э.Р. Смольяков. Вариационные уравнения электродинамики // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, N 4. С. 475-480.
11. Э.Р. Смольяков. Теория движения электрически заряженных массивных тел в пространстве Минковского и двойственном к нему // «Динамика неоднородных систем». Труды Института системного анализа РАН. 2007. Том 29. Вып. 11. С. 85-117.
12. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 1968.
12. Л.А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Высшая школа. 1978.

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА

В.М. Тихомиров

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Многие причины побуждают ставить и решать экстремальные задачи, т.е. задачи на максимум и минимум.

Их стали решать на заре зарождения математики. Сначала решались геометрические задачи. Стимулом для древних были эстетические причины, стремление к совершенству и любознательность. Эти черты, вообще говоря, свойственны человеку во все времена, так что и поныне они дают поводы к поиску оптимальных решений.

Одним из важнейших стимулов для развития теории экстремума был причина – «натурфилософская», связанная с тем, что в моделях, объясняющих явления природы, присутствует необходимость решать задачи на минимум или максимум, т. е. законы природы описываются принципами теории экстремума. По этому поводу Л. Эйлер сказал так: В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Одни из основных – прагматические причины, стремление людей наилучшим образом распорядиться имеющимися у него ресурсами. Это приводит к необходимости исследовать экстремальные задачи в технике, при управлении различными процессами, в экономике и т. п.

Экстремальные задачи изначально обычно формулируются на языке той области знаний, откуда они родом, на языке инженерии, физики, геометрии и т.п. Для того, чтобы иметь возможность исследовать их математическими средствами, необходимо осуществить перевод их на язык математического анализа. Такой перевод называется формализацией.

Формализовать экстремальную задачу значит описать функцию $f(f: X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \pm\infty)$ (вместе с областью её определения X), которую надо минимизировать или максимизировать, а также ограничение $C \subset X$. Ограничения, как правило, задаются равенствами и неравенствами.

Далее для задачи: «найти минимум (максимум) f при ограничении C » употребляется запись:

$$f(x) \rightarrow \min(\max), x \in C. \quad (P)$$

Когда мы пишем $f(x) \rightarrow \text{extr}$, это означает, что может рассматриваться и задача на максимум и задача на минимум. Например, геометрическая задача о максимальной площади прямоугольника при сумме длин сторон, равной числу a формализуется так: $x(a-x) \rightarrow \max$.

Точки $x \in C$ в (P) называются допустимыми точками. Допустимая точка $\hat{x}$ называется абсолютным (или глобальным) минимумом (максимумом) или решением задачи (P), если $f(x) \geq f(\hat{x})(f(x) \leq f(\hat{x}))$ для любого $x \in C$. Для

решения задач приходится сначала искать локальные экстремумы, т.е. решения не во всем X , а в окрестности некоторой точки.

В историческом развитии в теории экстремума выделились такие основные разделы: конечномерные гладкие задачи на экстремум с ограничениями типа равенств (начало этого периода относится к семнадцатому веку), вариационное исчисление (оно развивалось в восемнадцатом и девятнадцатом веках), в двадцатом веке возникли линейное программирование и оптимальное управление.

Одним из основных разделов теории экстремума является теория необходимых условий экстремума, которая разрабатывалась в каждом классе задач. Важнейшую роль в создании теории необходимых условий экстремума сыграли П. Ферма (1601 – 1665), Л. Эйлер (1707 – 1783), Ж.Лагранж (1736 – 1813), и Л. С. Понтрягин (1908 – 1988).

Теория экстремума (точнее – теория необходимых условий экстремума) имеет определённую дату своего рождения. Это произошло в 1638 году, когда Пьер Ферма направил письма Ж. Робервалю и М. Мерсенну для передачи Декарту (журналов в ту пору ещё не существовало, и научные результаты становились достоянием современников путем переписки) с изложением необходимого условия для экстремальных задач без ограничений для функций одного переменного (Fermat P. Ouevres de Fermat, vol. 1, Gautier-Villar, Paris, 1891, p. 133). Приведем теперешнюю формулировку этого результата:

Теорема 1 (необходимое условие экстремума в гладкой задаче без ограничений). Пусть функция одного переменного, определенная на некотором интервале, дифференцируема в некоторой точке $\hat{x}$ этого интервала. Тогда, если точка $\hat{x}$ является точкой локального экстремума в задаче

$$f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad (P_1)$$

то $f'(\hat{x}) = 0$. Эта теорема верна и в многомерном случае.

Этот результат обычно называют теоремой Ферма, хотя во времена Ферма понятия производной не существовало. Это понятие было введено в науку Ньютоном и Лейбницем – родоначальниками математического анализа. Современное определение с ε и δ было дано Коши в первой трети 19 века. Теорема 1 фактически следует из определения производной. Применение теоремы 1 к задаче о прямоугольнике наибольшей площади (именно ей Ферма в письме 1638 года иллюстрировал применение своего метода) приводит к решению задачи: наибольшую площадь имеет квадрат.

После Ферма история математики сделала неожиданный скачок от единицы к бесконечности, от исследования экстремумов функции одного переменного к исследованию функционалов от кривых. И. Бернулли (1667 – 1748) в 1696 году поставил задачу о брахистохроне, – о кривой наибоьстрейшего ската: требовалось определить форму желоба, соединяющего две различные точки, спускаясь по которому без трения тело достигало бы нижней точки за наименьшее время.

От постановки задачи о брахистохроне принято отсчитывать историю вариационного исчисления, раздела теории экстремума, где исследуются

специальные задачи на максимум и минимум, в которых аргументом являются кривые. В начальный период вариационного исчисления был выделен следующий класс задач. Пусть $L = L(t, x, y)$ гладкая функция трех переменных. На множестве непрерывно-дифференцируемых кривых $x(\cdot)$, соединяющих две точки плоскости (t_0, x_0) и (t_1, x_1) требуется найти минимум значения функционала $J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$.

Теорема 2 (необходимые условия слабого минимума в простейшей задаче): Пусть в задаче

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \quad (P_2)$$

интегрант L является непрерывно-дифференцируемой функцией по совокупности переменных. Тогда, если функция $\hat{x}(\cdot)$ является локальным решением задачи, то $\hat{L}_{\dot{x}}(t)(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ и выполняется уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$ (через $\hat{L}_{\dot{x}}(t)$ и $\hat{L}_x(t)$ обозначены (соответственно) $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ и $L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$).

Теорема 2 была доказана Эйлером в его знаменитом мемуаре “*Methodus inveniendi ...*”, Lausanne, 1744. В случае брахистохроны интегрант имеет такой

вид: $L = \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{x}}$. Уравнение Эйлера интегрируется, решениями оказываются циклоиды. С помощью уравнения Эйлера на базе экстремального принципа (принципа Гамильтона) описываются многие законы природы.

Общий приём решения задач с ограничениями был разработан Жозефом Луи Лагранжем. В своем мемуаре *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1797 он писал: Можно высказать следующий общий принцип.

Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к функции, о которой говорилось, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределённые множители, и искать затем максимум и минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединённые к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных. Точнее говоря, имеет место

Теорема 3 (правило множителей Лагранжа). Пусть функции $f_i, 0 \leq i \leq m$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$. Если точка $\hat{x}$ является локальным экстремумом в задаче

$$f_0(x) \rightarrow \text{extr}, f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m, \quad (P_3)$$

то существует набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ не равных одновременно нулю, такой, что для функции Лагранжа $L(x, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$,

выполнено условие стационарности: $L_x(\hat{x}, \bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^m \lambda_i f_{i'}(\hat{x}) = 0$. В задаче на минимум (максимум) $\lambda_0 \geq 0$ ($\lambda_0 \leq 0$).

Придав несколько расширительный смысл словам сказанным Лагранжем, его мысль можно выразить так: если хотите решить задачу на экстремум с ограничениями, составьте функцию Лагранжа и напишите необходимое условие экстремума в задаче на экстремум функции Лагранжа, «как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения присоединённые к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных». Этот принцип оказывается справедливым для очень широкого круга экстремальных задач, в частности для задач вариационного исчисления с ограничениями и для задач оптимального управления. Такое расширительное толкование слов Лагранжа мы называем принципом Лагранжа. Продемонстрируем принцип Лагранжа на примере задачи оптимального управления (охватывающую задачу вариационного исчисления с дифференциальной связью).

Пусть f – скалярная, а φ n -мерная векторная функции $1+n+r$ переменных (сейчас это записывают так:

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^r.$$

Рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \dot{x} = \varphi(t, x, u(t)), x(t_i) = x_i, i = 0, 1, u(t) \in U. (P_4)$$

Если в задаче (P_4) множество U совпадает с $\mathbb{R}^r$, то эту задачу называют задачей Лагранжа классического вариационного исчисления в понтрянгинской форме, а общую задачу (P_4) называют задачей оптимального управления в понтрянгинской форме. Рассмотрим (P_4) в пространстве $Z = PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times PC(\Delta, \mathbb{R}^r)$ – произведении пространства кусочно непрерывно-дифференцируемых функций $x(\cdot)$ и пространства кусочно-непрерывных функций $u(\cdot)$.

Задачу $I(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, u(t)) dt \rightarrow \min, u(t) \in U$ назовем простейшей ляпуновской задачей (g – функция $1+r$ переменных). Критерием (необходимым и достаточным условием) минимальности функции $\hat{u}(\cdot)$ в простейшей ляпуновской задаче является такое условие минимума: $\min_{u \in U} g(t, u) = g(t, \hat{u}(t))$ в точках непрерывности функции $\hat{u}(\cdot)$. А теперь применим принцип Лагранжа к получению условия минимума в задаче (P_4) . Функция Лагранжа в задаче (P_4) пишется как и в задаче (P_2) , только вместо суммы фигурирует интеграл:

$$L(x(\cdot), u(\cdot), \bar{\lambda}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt, \text{ где}$$

$L(t, x, y, u) = \lambda_0 f(t, x, y) + \langle p(t), y - \varphi(t, x, u) \rangle$, $\bar{\lambda} = (\lambda_0, p(\cdot))$, $p(\cdot) = (p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot))$ и $\langle p, x \rangle$ для двух n -мерных векторов $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ это сумма $p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$.

Задачу минимизации функции Лагранжа «как если бы переменные были независимы», будем рассматривать отдельно, сначала фиксируя $\hat{u}(\cdot)$, а потом $\hat{x}(\cdot)$. Задача $L(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \bar{\lambda}) \rightarrow \min$, $x(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$, (a) – простейшая задача вариационного исчисления (задача (2)), задача $L(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \bar{\lambda}) \rightarrow \min$, $u(t) \in U$ (b) есть простейшая ляпуновская задача, если U не все n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ и задача (2), если $U = \mathbb{R}^n$. Принцип Лагранжа приводит к следующему результату (Понтрягин и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961):

Теорема 4 (необходимое условия минимума в задаче оптимального управления в понтрягинской форме). Пусть пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ допустима в задаче (P_4) , причем выполнены некоторые условия непрерывности и гладкости функций $f, f_x, \varphi, \varphi_x$. Тогда, если эта пара является решением в задаче (P_4) , то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, p(\cdot)) \in \mathbb{R} \times PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n*})$, что 1) для задачи (a) выполнено уравнение Эйлера по x : $-\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow -\dot{p}(t) = p(t) \hat{\varphi}_x(t) - \lambda_0 \hat{f}_x(t)$, 2) для простейшей ляпуновской задачи (b) выполнено условие минимума (равносильное условию максимума):

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u, \bar{\lambda}) = \hat{L}(t) \Leftrightarrow$$

$$\max_{u \in U} (p(t) \cdot \varphi(t, \hat{x}(t), u) - \lambda_0 f(t, \hat{x}(t), u)) = p(t) \cdot \hat{\varphi}(t) - \lambda_0 \hat{f}(t)$$

в точках непрерывности функции $\hat{u}(\cdot)$. А если $U = \mathbb{R}^r$ то вместо условия максимума выполняется уравнение Эйлера по u : $\hat{L}_u(t) = 0$.

Теоремы 1–4 – важнейшие теоремы в теории необходимых условий, которые были получены на протяжении трех веков от Ферма до Понтрягина. Принцип Лагранжа для всех рассмотренных случаев доказывается единообразно и достаточно просто, где главными базовыми результатами являются теоремы об обратной функции из классического и отделимости из выпуклого анализа.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ТОПЛИВООБЕСПЕЧЕНИЯ РЕГИОНА

И.Г. Русяк, К.В. Кетова, Е.В. Трушкова, Р.Ю. Кривенков
Ижевский государственный технический университет

В рамках ресурсосберегающей политики регионального топливобеспечения становится актуальной задача перехода на местные возобновляемые энергоресурсы, которая должна быть решена с учетом логистического подхода [1].

Одним из этапов решения логистической задачи является определение оптимальных маршрутов перевозки топливно-энергетических ресурсов (ТЭР). В работе предложен комплексный алгоритм решения задачи маршрутизации, где в качестве критерия оптимизации рассматривается минимизация транспортных расходов, входящих в стоимость ТЭР.

Введем следующие обозначения: $G = \{g_i\}$ – множество узлов пересечения дорог, $i = \overline{1, q}$, q – количество узлов; $C = \{C_{ij}\}$ – матрица транспортных затрат на перевозку одной тонны условного топлива (т.у.т.), где C_{ij} – затраты на перевозку сырья от i -го до j -го узла, $i, j = \overline{1, q}$.

Обозначим траекторию маршрута от узла g_{k_1} до узла g_{k_n} как $M_{k_1 k_n} = (g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{n-1}}, g_{k_n})$, где g_{k_1} – начальный узел маршрута, g_{k_n} – конечный узел маршрута, k_i – номера узлов, входящих в k -ый маршрут, $i = \overline{1, n}$.

Транспортные затраты на перевозку ТЭР от узла g_{k_1} до узла g_{k_n} по k -ому маршруту складываются из транспортных затрат на перевозку ТЭР по каждому участку дороги: $C_{k_1 k_n} = C_{k_1 k_2} + C_{k_2 k_3} + \dots + C_{k_{n-1} k_n}$.

Задача маршрутизации заключается в поиске маршрута с минимальными транспортными затратами на перевозку 1 т.у.т. от узла g_{k_1} до узла g_{k_n} :

$$C_{k_1 k_n} \rightarrow \min. \quad (1)$$

Комплексный алгоритм решения задачи маршрутизации состоит из трех этапов:

- 1) нахождение первоначального (опорного) маршрута с помощью упрощенного алгоритма A^* (Астар) [2];
- 2) получение множества допустимых маршрутов с помощью метода Йена [3];
- 3) нахождение оптимального маршрута (реализуется генетический алгоритм, адаптированный под задачу маршрутизации) [4].

Алгоритм A^* позволяет определить маршрут с наименьшей стоимостью перевозки ТЭР от начального до конечного узла. Порядок обхода узлов графа определяется с помощью эвристической функции $f(x) = \bar{c}(x) + h(x)$, где

$\bar{c}(x)$ – оценка стоимости перевозки от начального узла g_{k_1} до рассматриваемого g_{k_m} ; $h(x)$ – оценка расстояния от узла g_{k_m} до конечного g_{k_n} :

$$\bar{c}(M_{k_1 k_m}) = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} l(k_i, k_{i+1}) c(k_i, k_{i+1})}{c(k_1, k_m)}, \quad (2)$$

где $l(k_i, k_{i+1})$ – длина дороги, соединяющей i -ый и $(i+1)$ -ый узел графа дорог; $c(k_i, k_{i+1})$ – удельный тариф, стоимость перевозки топлива от i -го до $(i+1)$ -го узла маршрута;

$$h(M_{k_m k_n}) = \frac{r(k_m, k_n) \cdot \tau}{l(k_m, k_n)}, \quad (3)$$

где $r(k_i, k_{i+1})$ – расстояние между i -ым и $(i+1)$ -ым узлами; τ – задаваемый параметр, определяющий силу влияния $r(k_m, k_n)$ на функцию $f(x)$.

Алгоритм А* включает в себя следующие этапы:

1. Задается пустое множество элементов, состоящее из N промежуточных маршрутов:

$$M_{k_1 k_m}^j = (g_{k_1^j}, g_{k_2^j}, \dots, g_{k_m^j}), \quad j = \overline{1, N}. \quad (4)$$

2. В очередь маршрутов добавляется маршрут с начальным узлом:

$$M_{k_1 k_i}^1 = (g_{k_1}). \quad (5)$$

3. Выбирается маршрут, при котором функция $f(x)$ минимальна:

$$M_{k_1 k_i}^J = \arg \min_{j=1, N} (f(M_{k_1 k_i}^j)). \quad (6)$$

4. В очередь добавляются n^J маршрутов, содержащих узлы, смежные с узлом $g_{k_m}^J$:

$$M_{k_1 k_m}^j = (g_{k_1^j}, g_{k_2^j}, \dots, g_{k_{m-1}^j}, g_{k_m^J}, g_{k_{m+1}^j}, \dots, g_{k_n^j}), \quad j = \overline{1, n^J}. \quad (7)$$

5. Проверяется, не найден ли искомый маршрут. Маршрут считается найденным, если при повторном прохождении цикла алгоритма он остается неизменным. Иначе осуществляется переход к пункту 2.

Для гибкости алгоритма А* и увеличения вероятности попадания в глобальный минимум вводится функция вероятности для множества маршрутов:

$$P(M_{k_1 k_m}^j) = (f(M_{k_1 k_m}^J) - f(M_{k_1 k_m}^j))^2 / \sum_{j=1}^{n^J} (f(M_{k_1 k_m}^J) - f(M_{k_1 k_m}^j))^2, \quad (8)$$

где λ – параметр, определяющий силу влияния функции $f(x)$ на вероятностную функцию $P(M_{k_1 k_m}^j)$, $0 < \lambda < \infty$. Тогда в пункте 3 алгоритма А* маршрут $M_{k_1 k_i}^J$ определяется следующим соотношением:

$$P(M_{k_1 k_m}^j) \leq \eta \leq P(M_{k_1 k_m}^{j+1}), \quad j = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где η – равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[0, 1]$.

В результате реализации алгоритма A^* определяется опорный маршрут. Далее следует получить множество допустимых маршрутов с помощью метода Йена.

Алгоритм метода Йена можно представить следующим образом:

1. Задается первоначальный маршрут $M_{k_1 k_n}^z = (g_{k_1^z}, g_{k_2^z}, \dots, g_{k_n^z})$, $z = 1$.

2. Исключается по очереди каждое ребро $(g_{k_i^z}, g_{k_{i+1}^z})$, $i = \overline{1, (n-1)}$ маршрута

$M_{k_1 k_n}^z$ и для получившихся графов находятся новые маршруты:

$$M_{k_1 k_n}^j = (g_{k_1^j}, g_{k_2^j}, \dots, g_{k_n^j}), \quad j = \overline{1, (n-1)}. \quad (10)$$

3. Находится маршрут с наименьшими транспортными расходами:

$$M_{k_1 k_n}^{z+1} = \arg \min_{j=\overline{1, n-1}} C(M_{k_1 k_n}^j), \quad z := z + 1. \quad (11)$$

4. Проверяется условие $z \geq N$, где N – необходимое количество допустимых маршрутов. Если данное условие не выполняется, тогда осуществляется переход к пункту 2.

К найденному количеству допустимых маршрутов применяется генетический алгоритм [5], использующий операторы кроссинговера, отбора и мутации, адаптированные под задачу маршрутизации.

Оператор кроссинговера применяется в случае наличия общего узла или общего ребра маршрутов. Приведем алгоритм применения оператора кроссинговера по общему узлу.

1. Пусть имеются два допустимых маршрута:

$$M_{k_1 k_n} = (g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_n}), \quad (12)$$

$$M_{l_1 l_n} = (g_{l_1}, g_{l_2}, \dots, g_{l_n}), \quad (13)$$

для которых выполняются следующие условия:

$$g_{k_1} = g_{l_1}, \quad g_{k_n} = g_{l_n}, \quad (14)$$

и имеет место общий узел:

$$g_{k_i} = g_{l_j}, \quad (15)$$

где $g_{k_1} \in M_{k_1 k_n}$, $g_{l_1} \in M_{l_1 l_n}$ – исходные узлы рассматриваемых маршрутов;
 $g_{k_n} \in M_{k_1 k_n}$, $g_{l_n} \in M_{l_1 l_n}$ – завершающие узлы рассматриваемых маршрутов;
 $g_{k_i} \in M_{k_1 k_n}$, $g_{l_j} \in M_{l_1 l_n}$ – промежуточные узлы соответствующих маршрутов.

2. Скрещиваются маршруты (12), (13) по общему узлу $g_{k_i} = g_{l_j}$ и строятся новые маршруты:

$$M_{k_1 l_n} = (g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{i-1}}, g_{k_i}, g_{l_{j+1}}, \dots, g_{l_{n-1}}, g_{l_n}), \quad (16)$$

$$M_{l_1 k_n} = (g_{l_1}, g_{l_2}, \dots, g_{l_{j-1}}, g_{l_j}, g_{k_{i+1}}, \dots, g_{k_{n-1}}, g_{k_n}). \quad (17)$$

3. Для вновь найденных маршрутов рассчитываются стоимости перевозок 1 т у.т. Если стоимости перевозок новых маршрутов (16), (17) ниже стоимости перевозок исходных маршрутов (12), (13), то они участвуют в дальнейшем решении задачи маршрутизации.

В результате применения данного алгоритма для региональной системы теплоснабжения были определены оптимальные маршруты перевозок

топливно-энергетических ресурсов. На рис. 1 представлены оптимальные маршруты перевозок ТЭР из пунктов подготовки топлива до теплоисточников Дебесского района Удмуртской Республики.

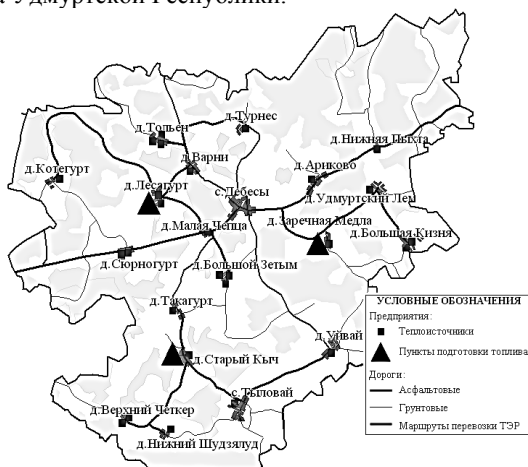


Рис. 1. Схема маршрутов перевозки ТЭР на теплоисточники Дебесского района

Список литературы

1. K.V. Ketova, A.S. Sayranov, E.V. Trushkova. Development of software and mathematical model to control the regional system of fuel supply based on renewable energy sources // 3 International Workshop “Innovation Information Technologies: Theory and Practice”, Dresden, Germany, 2010. – С. 218-222.
2. Ж.Л. Лорьер. Системы искусственного интеллекта. – М.: Мир, 1991. – С. 238-244.
3. Э. Майника. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
4. Д. Рутковская, М. Пилинский. Информационные нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Телеком, 2004. – 452 с.

ОЦЕНКА НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ НЕ МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ

А.А. Шевляков

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Введение

При решении задачи управления аффинными системами методом нормальной формы возникает вопрос о характере нулевой динамики. Характер

замены, приводящей систему к нормальной форме, может затруднить получение нулевой динамики в новых переменных. Для оценки ее поведения можно использовать либо первое приближение, либо численное моделирование.

1. Преобразования и нормальная форма аффинных систем

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i, \\
 x &\in R^n, u = (u_1, \dots, u_m)^T \in R^m, \\
 A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, \\
 A(0) &= 0, \\
 B(x) &= (B_1(x), \dots, B_m(x)), \\
 B_j(x) &= (b_j^1(x), \dots, b_j^n(x))^T, \\
 j &= \overline{1, m}, \text{rang } B(0) = m, \\
 a_i(x), b_j^i(x) &\in C^\infty(\Omega),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω - открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T, \\
 \varphi_i(x) &\in C^\infty(\Omega), \varphi_i(0) = 0, i = \overline{1, m}
 \end{aligned}$$

Пусть существуют такие числа $\rho_i \geq 1, i = \overline{1, m}$, что:

- 1) при $k < \rho_i - 1$ функции $L_{B_j} L_{A^k} \varphi_i(x), 1 \leq j \leq m$, равны нулю в некоторой окрестности точки $x = 0$;
- 2) матрица

$$A_\rho(x) = \begin{pmatrix} L_{B_1} L_A^{\rho_1-1} \varphi_1(x) & \dots & L_{B_m} L_A^{\rho_1-1} \varphi_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{B_1} L_A^{\rho_m-1} \varphi_m(x) & \dots & L_{B_m} L_A^{\rho_m-1} \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

невырождена в точке $x = 0$.

$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ – векторная относительная степень.

Если в точке $x = 0 \mid \rho \mid < n$ и распределение $G = \text{span}\{B_1, \dots, B_m\}$ инволютивно, то в окрестности точки $x = 0$ существует такая замена переменных

$$z^i = \Phi^i(x), 1 \leq i \leq m, \eta = \Psi(x),$$

что система (1) с выходом $y = \varphi(x)$ запишется в нормальной форме

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1^1 &= z_2^1, \dots, \dot{z}_{\rho_1-1}^1 = z_{\rho_1}^1, \\
\dot{z}_{\rho_1}^1 &= f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\
&\dots, \\
\dot{z}_1^m &= z_2^m, \dots, \dot{z}_{\rho_m-1}^m = z_{\rho_m}^m, \\
\dot{z}_{\rho_m}^1 &= f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\
\dot{\eta} &= q(z, \eta), \\
y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^T.
\end{aligned} \tag{2}$$

Системе (2) соответствует система

$$\dot{\eta} = q(0, \eta),$$

которую называют **нулевой динамикой**. Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (1) с векторным выходом $y = \varphi(x)$ называют **минимально фазовой** (в точке $x = 0$).

Поскольку обычно неизвестно заранее, является ли система минимально фазовой, характер нулевой динамики может быть численно оценен следующим образом: проинтегрируем систему (1), взяв в качестве начальных условий точку, удовлетворяющую соотношениям:

$$\begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ \vdots \\ z_{\rho_1}^1 \\ \vdots \\ z_2^m \\ \vdots \\ z_{\rho_m}^1 \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

а управление выберем стабилизирующим переменные z . Таким образом, во время интегрирования будет обеспечиваться соблюдение условий (3), что, по определению, даст нам траекторию нулевой динамики в виде $\eta(x(t))$.

2. Пример

Модель движения вертолета имеет вид

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -T \sin(\vartheta + \delta), & M\dot{y} &= T \cos(\vartheta + \delta) - Mg, \\
J\ddot{\vartheta} &= Td_1 \cos(\delta) + Td_2 \sin(\delta), & \dot{T} &= w_1, \quad \dot{\delta} = w_2.
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных, переводящую положение равновесия этой системы в нулевое.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\
\dot{x}_5 &= x_6, \\
\dot{x}_6 &= (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)), \\
\dot{x}_7 &= u_1, \\
\dot{x}_8 &= u_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) содержит 2 управления. Соответственно, выберем 2 виртуальных выхода - $y_1 = x_1, y_2 = x_3$, стабилизация нулевых значений которых является одной из целей управления. Для преобразования к нормальной форме сделаем еще одну локальную замену переменных, положив

$$\begin{aligned}
z_1^1 &= x_1, z_2^1 = x_2, \\
z_3^1 &= -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), \\
z_1^2 &= x_3, z_2^2 = x_4, \\
z_3^2 &= (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\
\eta_1 &= x_5, \eta_2 = x_6.
\end{aligned}$$

Нормальная форма, соответствующая выходам $y_1 = z_1^1, y_2 = z_1^2$ и записанная в виде «заготовки», имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1^1 &= z_2^1, \\
\dot{z}_2^1 &= z_3^1, \\
\dot{z}_3^1 &= -(x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8)x_6 - g \sin(x_5 + x_8)u_1 - (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8)u_2, \\
\dot{z}_1^2 &= z_2^2, \\
\dot{z}_2^2 &= z_3^2, \\
\dot{z}_3^2 &= -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8)x_6 + g \cos(x_5 + x_8)u_1 - (x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8)u_2, \\
\dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\
\dot{\eta}_2 &= (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)).
\end{aligned} \tag{5}$$

Проведенный численный эксперимент показал очень малую ошибку между решениями, полученными 2 разными способами (в переменных x и когда подсистема нулевой динамики была выписана явно). Наблюдаемое поведение переменных η позволяет сформулировать гипотезу об устойчивости (но не асимптотической) нулевой динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-07-00468 и № 10-07-00617).

Список литературы

1. *K.E. Brennan, S.L. Campbell, L.R. Petzold* Numerical solutions of initial-value problems in differential-algebraic equations // Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia 1996. 256 с.

2. *Ткачев С.Б.* Стабилизация нестационарных аффинных систем методом виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1507-1517.

СЕКЦИЯ №5

Методы вычислительной и прикладной математики и их применение к фундаментальным исследованиям в различных областях энергетики и информационно-коммуникационных технологий

ПРОЦЕДУРА ВЫПОЛНЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧАЕМЫХ МОД ПЛАНАРНЫХ СВЕТОВОДОВ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.В. Алексеев

Астраханский Государственный Технический Университет

В настоящее время все большее распространение находят различные системы, основанные на оптических волноведущих структурах. Это, прежде всего, относится к системам связи. Однако, свойства этих структур создают потенциальные возможности для значительно их большего применения. В частности они могут быть использованы как чувствительные элементы датчиковых устройств [1]. Автором разрабатывалось устройство измерения, основанное на анализе изменений энергетических характеристик излучаемых мод планарных световодов. В процессе выполнения выяснилось, что проведение численных расчетов параметров излучаемых мод связано со значительными трудностями. В связи с этим автором разработана процедура выполнения расчетов, которая реализована в виде программного продукта. В работе приводятся основные теоретические выводы, полученные автором ранее и использованные в процедуре выполнения расчетов, а также описывается непосредственно процедура выполнения расчетов.

Измеряемое воздействие индуцирует изменение показателей преломления сердцевины и оболочки световода [2]. При этом материал световода, в общем случае и сердцевины и оболочки, становится оптически анизотропным с ориентацией оптической оси вдоль внешнего воздействия. С помощью известных эффектов (фотоупругости, электрооптический и т.д.), описывающих воздействие, можно определить значения показателей преломления анизотропного световода, которых, вообще говоря, будет два – обыкновенный и необыкновенный. Эти значения функционально связаны с величиной внешнего воздействия.

Рассмотрим случай, когда оптическая ось анизотропной части световода направлена вдоль границы раздела сердцевины с оболочкой. Допустим, что сердцевина световода остается изотропной. Профиль показателя преломления планарного световода принят ступенчатым и симметричным, что упрощает рассмотрение задачи, но в то же время отражает основные особенности рассматриваемых расчетов. Считается, что величина воздействия достаточна для излучения оптической энергии из световода. Доля излучаемой энергии и ее направление находятся с применением законов геометрической оптики, которая, как известно, имеет ограничение при $V < 10$.

Падающий луч в анизотропной области световода в общем случае претерпевает двулучерасщепление. Обыкновенный луч (индекс η), поляризованный перпендикулярно плоскости главного сечения, при распространении в анизотропной среде ведет себя так, как будто распространяется в изотропной среде. В рассматриваемом случае это ТЕ мода. Для необыкновенного луча (индекс ϵ), поляризованного в плоскости главного сечения, волновой вектор не совпадает с лучевым. В рассматриваемой ситуации это ТМ направляемая мода. За счет двулучепреломления лучевой вектор смещается относительно волнового вектора. На рисунке 1 показано падение направляемой моды (ТЕ и ТМ) на границу с анизотропной оболочкой и ход преломленных лучей.

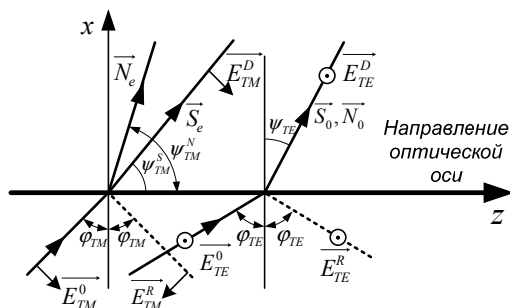


Рис. 1. Направления лучей и волновых нормалей на границе сердцевины и анизотропной оболочки.

$\vec{N}_e, \vec{N}_0$ – направления волновых векторов необыкновенного и обыкновенного лучей соответственно; $\vec{S}_e, \vec{S}_0$ – направления лучевых векторов необыкновенного и обыкновенного лучей; $\varphi_{TE}, \varphi_{TM}$ – углы падения мод на границу с оболочкой; $\psi_{TE}^N, \psi_{TM}^N, \psi_{TE}^S, \psi_{TM}^S$ – углы преломления соответственно ТЕ и ТМ лучей и волновых векторов; z – направление оптической оси. $\vec{E}_{TE}^0, \vec{E}_{TM}^0$ – векторы напряженности электрических полей падающих на границу ТЕ и ТМ мод, соответственно; $\vec{E}_{TE}^D, \vec{E}_{TM}^D$ – векторы напряженности электрических полей преломленных ТЕ и ТМ мод оболочки, соответственно. Поляризация мод при выбранных условиях сохраняется.

При выбранных расположениях оптической оси и падающих лучей можно сказать, что обыкновенный и необыкновенный лучи лежат в одной плоскости вместе с падающими лучами, двулучерасщепления не наблюдается.

С помощью закона Снеллиуса однозначно определяется направление обыкновенной волны. Угол преломления ψ_{TE} будет определяться выражением

$$\psi_{TE} = \arcsin \left[\frac{\beta_j^{TE}}{k_0 n_0^y} \right], \quad (1)$$

где β_j^{TE} – постоянная распространения (ПР) ТЕ j -моды; k_0 – волновой вектор в вакууме; n_0^y – обыкновенный показатель преломления, значение, которого функционально связано с величиной внешнего воздействия.

Направление необыкновенной волны будет определяться двумя лучами – волновым и лучевым Пойнтинга. Причем направление лучевого вектора определяется направлением волнового вектора. С учетом уравнения нормалей Френеля получено выражение угла преломления волнового вектора ψ_{TM}^N

$$\psi_{TM} = \frac{\pi}{2} - \arccos \left[\frac{\beta_j^{TM}}{k_0 n_c} \right], \quad (2)$$

где ψ – угол падения ТМ j -моды с ПР β_j^{TM} ; n_c – показатель преломления изотропной сердцевины; k_0 – необыкновенный показатель преломления, значение, которого также функционально связано с внешним полем.

Используя геометрические построения направлений лучей, выводится угол преломления лучевого вектора необыкновенной ТМ моды.

Отраженные волны в изотропной среде распространяются под углами равными углам падения.

Доли излучаемых энергий из оболочки находятся путем рассмотрения граничных условий для векторов напряженности электрического и магнитного полей рассматриваемых волн. Энергетические коэффициенты пропускания H оболочки, равные отношениям нормальных компонент усредненного по времени вектора Пойнтинга преломленной и падающей волн для ТЕ и ТМ мод соответственно равны

$$H_{TM} = \frac{4n_e(\psi_{TM}^N)n_c \sin \psi_{TM}^S \cos \varphi_{TM}}{\left(n_e(\psi_{TM}^N) \cos \varphi_{TM} + n_c \sin \psi_{TM}^S \right)^2}, \quad (3)$$

где $\varphi_{TE} = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\beta_j^{TE}}{k_0 n_c} \right)$ – угол падения ТЕ j -моды; n_e – показатель преломления необыкновенной волны.

Поскольку в указанные выражения (3) входят показатели преломления анизотропной оболочки, которые зависят от величины воздействия, то можно вывести функциональную зависимость между долей излучаемой энергии и величиной воздействия.

Такие зависимости для ТЕ и ТМ мод при приложении сдвигивающего одноосного усилия P_z (в направлении оси световода) на оболочку световода получены автором и, например, для ТЕ мод имеет вид

$$H_j^{TE} = \frac{4AB}{[A+B]^2} \quad (4)$$

$$A = \left[(n_c)^2 - \frac{(\beta_j^{TE})^2}{k_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ и}$$

$$B = \left[\left(n_0 - \frac{P_3(n_0)^3}{2K} [p_{12} - \mu(p_{11} + p_{12})] \right)^2 - \frac{(\beta_j^{TE})^2}{k_0^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где p_{11} , p_{12} , K – упругооптические коэффициенты и модуль Юнга материала оболочки соответственно; n_0 – показатель преломления изотропной оболочки световода.

Например, графическая зависимость (4) для моды высокого порядка ($j=12$) с ПР $\beta_{TE} = 6733863,65 \text{ м}^{-1}$ планарного кварцевого световода с параметрами $n_c = 1,51$; $n_0 = 1,5$; $p_{11} = 0,27$; $p_{12} = 0,12$ и длиной волны излучения 1,4 мкм представлена на рисунке 2.

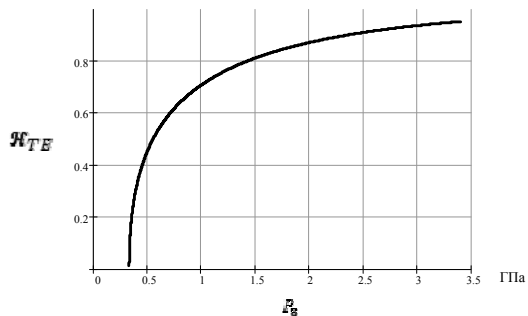


Рис. 2. Зависимость коэффициента пропускания ТЕ моды планарного световода от величины приложенного механического сжатия p_3 .

Данный расчет для любой ориентации внешнего воздействия, а, следовательно, наведенной оптической оси анизотропной части световода, автором был полностью выполнен в виде отдельного программного модуля. При этом количественное значение излучаемой энергии определяется найденным коэффициентом пропускания и начальной энергией моды. Процедура расчета энергий направляемых мод приведена в [3]. Рассматриваемая процедура расчета (программный модуль) совместно с модулем расчета направляемых энергий мод может эффективно применяться для создания новых или расчета существующих датчиков на основе планарных световодов.

Список литературы

1. *А.Н. Соколов, В.А. Яцеев.* Волоконно-оптические датчики и системы: принципы построения, возможности и перспективы // LIGHTWAVE Russian edition. – 2006. – №4. – с. 42-44.
2. *А.В. Алексеев.* Общая классификация способов съема информации в волоконно-оптической линии связи // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21.: Сб. трудов XXI Международной научной конференции. Саратов. – Т. 7. – 2008. – С. 249-251.
3. *А.В. Алексеев, Г.А. Попов.* Об оценке излучаемой мощности в симметричных слабонаправляющих планарных волноводах со ступенчатым профилем показателя преломления // Вестник СГТУ. – 2009. – вып. 2. – №4 (43). – с. 62-67.

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОЛЕТЕ ВОЗДУШНОЙ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЗАРЯДОВ

Д.С. Барабошкин

Московский энергетический институт (технический университет)

Одним из важнейших направлений работ в энергетике является защита персонала и населения от воздействия электромагнитного поля (ЭМП), создаваемого высоковольтным оборудованием.

К числу основных электроэнергетических объектов, создающих сильные ЭМП можно отнести воздушные линии электропередачи (ВЛ) и высоковольтное оборудование открытых распределительных устройств (ОРУ). Если электрические поля (ЭП) на ОРУ воздействуют только на персонал, то ЭП ВЛ могут воздействовать и на население, так как территория под проводами ВЛ не огораживается. Т.о. воздействию ЭП могут подвергаться не только лица, профессионально связанные с такого рода воздействиями, но и население.

При нахождении человека под действием ЭП на его теле индуцируется электрический заряд и, соответственно, через тело человека в землю будет стекать ток. В зависимости от величины тока с различной степенью опасности проявляются негативные эффекты воздействия, среди которых: нарушения со стороны нервной и сердечнососудистой системы, нарушение процессов иммунитета, влияние на эндокринную систему [1].

Оценка ЭМП промышленной частоты (50 Гц) осуществляется раздельно по напряженности электрического поля (E) в кВ/м, напряженности магнитного поля (H) в А/м или индукции магнитного поля (B), в мкТл. Нормирование ЭМП 50 Гц на рабочих местах персонала дифференцировано в зависимости от времени пребывания в электромагнитном поле [2].

Контроль уровней ЭМП может осуществляться путем использования расчетных методов и/или проведения измерений на рабочих местах. Расчетные методы используются преимущественно при проектировании новых или реконструкции действующих объектов, являющихся источниками ЭМП [2].

Одним из наиболее распространенных методов расчета ЭП, создаваемых ВЛ, является метод эквивалентных зарядов (МЭЗ).

Идея МЭЗ заключается в том, что реальное распределение заряда по поверхности проводника замещается системой фиктивных эквивалентных зарядов (ЭЗ), которые распределяются внутри этой поверхности. Значения этих ЭЗ определяются из равенства потенциала поверхности проводника приложенному к нему напряжению. Форма ЭЗ при решении конкретной задачи выбирается исходя из характера рассматриваемого поля. В случае плоскопараллельных полей, т.е. полей протяженных проводников, параллельных друг другу и поверхности земли, удобно использовать ЭЗ в виде бесконечных равномерно заряженных осей. Расчет ЭП, создаваемых ВЛ, является, пожалуй, наиболее актуальной задачей среди задач с плоскопараллельным полем.

При расчете ЭП в пролете ВЛ принимаются следующие допущения.

1) Т.к. высота подвеса проводов много меньше длины пролета, то можно считать, что в пролете провода параллельны друг другу и поверхности земли, т.е. поле в пролете ВЛ плоскопараллельное.

2) Т.к. высота подвеса проводов и расстояние между ними много больше их радиусов, то можно считать, что заряд сосредоточен на их геометрических осях.

3) Т.к. расчет поля выполняется вдали от проводников ВЛ, то каждый расщепленный фазный провод в расчете может быть замещен одним проводом с эквивалентным радиусом.

4) Поверхность земли принимается идеально проводящей [3].

Точность расчета E при использовании МЭЗ определяется не только числом ЭЗ, замещающих реальное распределение заряда по поверхности проводника, но и глубиной их размещения ΔH под этой поверхностью. Рассмотрим эту проблему на следующем примере.

ВЛ с номинальным напряжением $U_{ном} = 500$ кВ в пролете имеет следующую конфигурацию (рис. 1). Расщепленные фазные провода марки АС 300/39, состоящие из трех составляющих, находятся на высоте $h=20$ м. Расстояние между соседними фазными проводами $D = 12$ м. Шаг расщепления фазных проводов 40 см, радиус составляющих $r_0 = 1,2$ см. На расстоянии $S = 15$ м от крайнего фазного провода расположено здание из железобетона высотой $H = 40$ м.

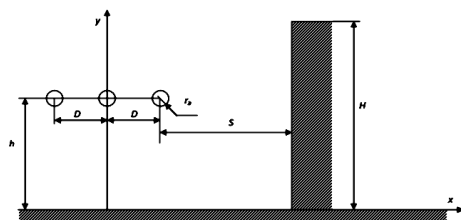


Рис. 1. Расчетная модель для анализа поля в пролете ВЛ.

На расстоянии $x_0 = 0,5$ м от стены определяется E . Задача решается для средней части здания, в предположении, что длина здания много больше его ширины и высоты, поэтому можно считать, что поле плоскопараллельное. Расчет производится МЭЗ, число ЭЗ, моделирующих поверхность стены, составляет 801, т.е. ЭЗ размещены через каждые $\Delta L = 5$ см вдоль поверхности стены. Глубина залегания ЭЗ ΔH варьируется. Система ЭЗ и контурных точек (КТ) представлена на рис.2. Заряд каждого из проводов замещается равномерно заряженной осью $\tau_i, i=1,2,3$. Соответствующие им КТ размещаются в верхних точках проводов. Поверхность стены моделируется системой из $N-3$ ЭЗ и таким же числом КТ. Т.о. общее число ЭЗ равно N .

Потенциал каждой КТ ϕ равен приложенному напряжению $U_j, j = 1, 2, \dots, N$ (потенциал стены равен нулю). Изображения заряженных осей $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$, в земле имеют заряды $\tau_i' = -\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$. Т.о. система ЭЗ задачи, состоит из пар заряженных осей τ_i и $-\tau_i$ с координатами $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, N$.

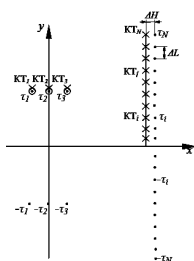


Рис.2. Система эквивалентных зарядов и контурных точек.

Для определения значений ЭЗ, составляется система из N уравнений, определяющих связь между значениями τ_i и U_j . Для каждой j -й КТ записывается выражение, связывающее ее потенциал $\phi_j = U_j$ со всеми $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$.

$$\sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ij}} = U_j, \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (1)$$

где r_{ij} – расстояние от i -го ЭЗ до j -й КТ. Т.о. получена система линейных алгебраических уравнений (1) из N уравнений с N неизвестными $\tau_i, i = 1, 2, \dots,$

Н. После этого из (1) определяются значения τ_i , и рассчитывается E в произвольной точке с координатами x_0, y_0 .

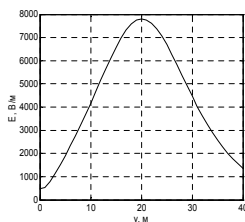
$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} \cdot \frac{x_0 - x_i}{r_i} - \frac{1}{r_i'} \cdot \frac{x_0 - x_i}{r_i'} \right), \\ E_y &= \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} \cdot \frac{y_0 - y_i}{r_i} - \frac{1}{r_i'} \cdot \frac{y_0 - y_i}{r_i'} \right), \\ E(x_0, y_0) &= \sqrt{E_x^2(x_0, y_0) + E_y^2(x_0, y_0)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$, $r_i' = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 + y_i)^2}$.

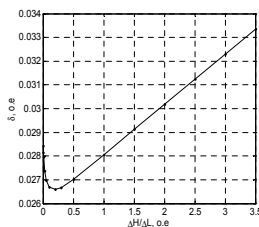
Ниже представлены результаты расчета. На рис.3, а показано распределение модуля напряженности ЭП вдоль поверхности стены. Максимальное значение E достигается на высоте, равной высоте подвеса проводов. Для различных соотношений $\Delta H/\Delta L$ по (3) были рассчитаны относительные погрешности δ в определении максимальной напряженности поля по отношению к аналитическому решению (рис.3,б).

$$\delta = \left| \frac{E_{\text{аналит}} - E_{\text{МЭЗ}}}{E_{\text{аналит}}} \right|. \quad (3)$$

Наибольшая точность расчета достигается при соотношении $\Delta H/\Delta L \approx 0,2$. Более близкое размещение ЭЗ к поверхности или наоборот их размещение на большей глубине приводит к увеличению погрешности в вычисляемых значениях зарядов, а следовательно, и при расчете параметров электрического поля.



а)



б)

Рис.3. Распределение напряженности поля вдоль поверхности стены (а) и зависимость δ от соотношения $\Delta H/\Delta L$ (б).

Список литературы

1. Е.С. Колечицкий, В.А. Романов, В.Г. Карташев. Защита биосферы от влияния электромагнитных полей – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. - 352 с.

2. Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы «Электромагнитные поля в производственных условиях. СанПиН 2.2.4.1191-03»

3. *А.А. Белогловский, И.В. Пашинин.* Методы расчета электрических полей в примерах и задачах: учебное пособие. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. - 84 с

МОДЕЛЬ РАСЧЕТА УДЕЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕПРЕРЫВНОГО ХИМИЧЕСКОГО DF-ЛАЗЕРА С УЧЕТОМ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ СМЕШЕНИЯ РЕАГЕНТОВ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Л.В. Гуров¹, А.С. Башкин²

¹ Московский Авиационный Институт, ² НПО Энергомаш

В основе работы непрерывного химического DF-лазера (DF-НХЛ) лежит процесс смешения сверхзвуковых струй окислителя, содержащего атомарный фтор, и горючего, содержащего дейтерий. Для обеспечения равномерного смешения этих струй используется сопловая решетка, представляющая собой набор попарно расположенных мелкомасштабных сопел окислителя и горючего. В результате смешения данных струй в лазерной камере образуется активная среда, содержащая молекулы DF в колебательно возбужденном состоянии, способные при их помещении в оптический резонатор генерировать кванты излучения на отдельных колебательно-вращательных переходах.

Уже сообщалось об использовании таких программных продуктов как Fluent и Ansys CFX при проведении трехмерных расчетов параметров активной среды фтороводородных НХЛ на основе решения уравнений Навье-Стокса, энергии, неразрывности и переноса отдельных компонент [1,2], однако постановка задачи в подобных расчетах ограничивалась рассмотрением НХЛ, работающим в режиме усилителя. Это объясняется тем, что для учета вынужденного излучения в полости резонатора и соответственно расчета энергетических характеристик лазера, таких как приведенная мощность (мощность, отнесенная к единице площади сопловой решетки) и удельный энергоъем (мощность, отнесенная к суммарному массовому расходу компонентов), требующих в свою очередь расчет поля интенсивности излучения, использование указанных программных продуктов является недостаточным, поскольку в решаемых ими уравнениях энергии и переноса концентраций колебательно возбужденных молекул DF отсутствуют источники члены, описывающие изменение энергии системы и концентраций молекул DF на отдельных колебательных уровнях за счет выноса энергии лазерного излучения из активной среды [3]. Поскольку разработка численной модели, позволяющей решать подобную систему трехмерных

уравнений совместно с расчетом полей интенсивности лазерного излучения является достаточно трудоемкой задачей, на практике обычно используется двухмерное приближение, в котором истечение компонентов в лазерную камеру происходит через соловую решетку щелевого типа [3,4]. В то же время в экспериментальных исследованиях НХЛ часто используются иные типы сопловых решеток, такие как NYLTE, дефлекторные и зубчатые, рассмотрение которых при моделировании процессов в активной среде подразумевает трехмерную постановку задачи. Подобные сопловые решетки обеспечивают интенсификацию процессов смешения в лазерной камере за счет растяжения площади контакта соседних струй окислителя и горючего, что является одним из эффективных способов повышения энергетических характеристик фтороводородных НХЛ. В настоящей работе предложен упрощенный подход, позволяющий при рассмотрении сопловых решеток данных типов проводить оценку энергетических характеристик DF-НХЛ с учетом трехмерности течения в активной среде.

Предлагаемый подход основан на допущении, что вынос энергии лазерного излучения из активной среды оказывает пренебрежимо малое влияние на изменение поля течения в активной среде. Иными словами, наработка и перенос излучающих молекул $DF(v)$, а также остальных компонентов смеси в активной среде происходит в полях импульса, температуры и давления, которые определены для случая режима усиления с помощью, например, программы Ansys CFX. Общий вид решаемых в данном случае уравнений переноса колебательно возбужденных молекул $DF(v)$ представлен ниже:

$$\frac{\partial(\rho U_j C_{DF(v)})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho D_{DF} \frac{\partial C_{DF(v)}}{\partial x_j} \right) + \dot{w}_{хим}(v) + \dot{w}_{рад}(v), \quad (1)$$

$$\dot{w}_{рад}(v) = \frac{W_{DF}}{N_A} \cdot \left[\frac{\alpha_{v,J+1}^{v+1,J} \cdot I_{v,J+1}^{v+1,J}}{h \nu_{v,J+1}^{v+1,J}} - \frac{\alpha_{v-1,J'+1}^{v,J'} \cdot I_{v-1,J'+1}^{v,J'}}{h \nu_{v-1,J'+1}^{v,J'}} \right],$$

где $x_j=(x, y, z)$ – координатные оси; v – номер колебательного уровня; $C_{DF}(v)$ – массовая доля молекул DF на колебательном уровне v ; D – коэффициент диффузии; W_{DF} – молярная масса молекулы DF; $\dot{w}_{хим}(v)$ – источниковый член, описывающий наработку молекул DF на колебательном уровне v за счет химической накачки, колебательно-колебательного обмена и колебательно-поступательной релаксации; $\dot{w}_{рад}(v)$ – источниковый член, описывающий изменение концентрации молекул DF на колебательном уровне v за счет вынужденного излучения; $g_{v+1,v}^J, g_{v,v-1}^J, I_{v+1,v}^J, I_{v,v-1}^J, h\nu_{v+1,v}^J, h\nu_{v,v-1}^J$ – локальное значение коэффициента усиления, интенсивность излучения в активной среде и энергия кванта на колебательно-вращательных переходах $v+1, J-1 \rightarrow v, J$ и $v, J-1 \rightarrow v-1, J$ молекулы DF; N_A – число Авогадро.

В качестве граничных условий в данных уравнениях задаются ранее рассчитанные в программе Ansys CFX массовые доли компонентов на входе в активную среду, соответствующие значениям вблизи среза сопловой решетки.

Расчет интенсивности в (1) проводится исходя из порогового условия генерации в плоскопараллельном резонаторе Фабри-Перо:

$$G_{v,v-1}^{j_{v-1}}(x, y) = \frac{1}{h_z} \int_0^{h_z} g_{v,v-1}^{j_{v-1}}(x, y, z) dz = g_{\text{пор}} \equiv \frac{1}{L_a} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}, \quad (2)$$

где $g_{v,v-1}^{j_{v-1}}(x, y, z)$ – локальное значение коэффициента усиления на колебательно-вращательном переходе P -ветви молекулы DF, рассчитанное при условии вращательного равновесия [3]; L_a – длина активной среды (длина сопловой решетки) вдоль оптической оси z , r_1 и r_2 – коэффициенты отражения зеркал резонатора (в случае, если одно из зеркал глухое, $r_i=1$).

Определив локальное значение интенсивности излучения в активной среде, можно вычислить соответствующее значение интенсивности выходного излучения для рассматриваемого типа резонатора следующим образом:

$$I_{\text{вых}}(x, y) = I(x, y) \frac{t_1 \sqrt{r_2} + t_2 \sqrt{r_1}}{(1-r_2) \sqrt{r_1} + (1-r_1) \sqrt{r_2}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \right), \quad (3)$$

где t_1 и t_2 – коэффициенты пропускания зеркал резонатора.

Для апробации данного подхода к решению трехмерных задач был рассмотрен DF-НХЛ с сопловой решеткой зубчатого типа, геометрические размеры которой были взяты из [5]. Наличие в ней плоскостей симметрии вдоль оси y и периодичности вдоль оси z (рис. 1) позволяет при трехмерном описании течения газа в соплах и лазерной камере ограничиться рассмотрением одного периода сопел вдоль оси z и одного полупериода зубьев вдоль оси y .

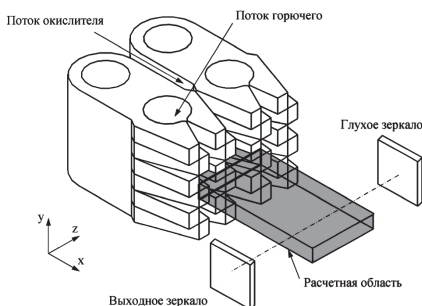


Рис. 1. Схема постановки задачи.

Выделенная область течения была разбита шестигранной сеткой, содержащей 36 ячеек вдоль оси y , 160 ячеек вдоль оси z и 400 ячеек вдоль оси x при протяженности активной среды по потоку, равной 2 см. На входе в сопло окислителя было задано давление $p_{\text{ок}}=10$ атм, а также температура $T_{\text{ок}}=1800\text{K}$ и массовые доли компонентов $C_F=0.133$, $C_{\text{HF}}=0.141$, $C_{\text{He}}=0.256$, $C_{\text{CF}_4}=0.309$, $C_{\text{N}_2}=0.138$. На входе в сопло вторичного горячего задано давление $p_{\text{гор}}=3$ атм, температура $T_{\text{гор}}=400\text{K}$ и массовые доли компонентов $C_{\text{D}_2}=0.4$, $C_{\text{He}}=0.6$. Температура стенок сопел принималась равной 400K.

При описании процессов химической накачки, колебательно-поступательной релаксации и колебательного обмена молекул DF была использована кинетическая модель [3] с модификациями, описанными в [6]. При определении порогового значения коэффициента усиления $g_{\text{пор}}$ (2) и интенсивности выходного излучения (3) коэффициент отражения выходного зеркала r_2 принимался равным 90%, а длина активной среды L_a задавалась равной 40 см.

На рис. 2 в виде изолиний показано полученное распределение суммарной интенсивности выходного излучения по ширине и высоте апертуры лазера. Неравномерный характер ее распределения объясняется достаточно сложной структурой течения и динамикой смешения реагентов в активной среде.

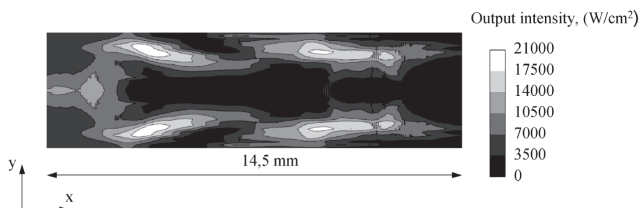


Рис.2. Распределение суммарной интенсивности выходного излучения по ширине (оси x) и высоте (оси y) апертуры.

В результате интегрирования полученного поля интенсивности по ширине и высоте апертуры, были рассчитаны значения приведенной мощности и удельного энергосъема, которые составили соответственно 120 Вт/см^2 и 60 Дж/г . С целью оценки вклада зубчатой структуры рассматриваемой сопловой решетки в изменение энергетических характеристик был также проведен аналогичный двухмерный расчет для случая эквивалентной щелевой сопловой решетки, в которой размеры критического сечения, длины и степени расширения сопел оставались неизменными. Для данного случая эти значения составили соответственно 78 Вт/см^2 и 39 Дж/г . Данные значения не противоречат логике, поскольку при получаемых значениях давления в активной среде (~ 15 торр) диффузия компонентов, которая определяет скорость смешения реагентов в случае щелевой сопловой решетки, будет существенно затруднена.

Список литературы

1. А.С. Башкин, Л.В. Гуров. Расчет параметров активной среды DF-НХЛ при трехмерном описании течения компонентов // Труды НПО Энергомаш. М., 2008, №26, С. 314-323
2. J. Shi, Z. Jiang, S. Yuan, W. Hua. Experimental and simulative investigation of HYLTE nozzle's mixed flowfield in DF/HF chemical lasers // High Power Laser and Particle Beams, 2004, Iss. 10, P. 1240-1244.
3. Р. Гросс, Дж. Ботт. Химические лазеры. М.: Мир, 1980. 832 с.

4. Ю.В. Лапин, М.Х. Стрелец. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368с.
5. F. Voigner, F. Merat, H. Brunet. Mixing diagnostic in a cw DF chemical laser operating at high cavity pressure // SPIE. 1990. V. 1397, P. 297-301.
6. A.S. Bashkin, L.V. Gurov. A numerical study of cw chemical DF laser performance with ramp nozzle array // SPIE. 2010. (to be published)

ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЙТРОННОГО СПЕКТРОМЕТРА С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ

В.Э. Дрейзин, Е.П. Кочура, А.А. Гримов, А.В. Кочура
Юго-западный государственный университет, г. Курск

Точное измерение интегральных характеристик нейтронного потока в настоящее время затруднено, поскольку не существует детекторов, имеющих одинаковую чувствительность к нейтронам любых энергий. В диапазоне энергий, с которым приходится иметь дело в различных зонах ядерных реакторов, чувствительность используемых на практике нейтронных детекторов может меняться на несколько порядков. Поэтому показания приборов, измеряющих интегральную плотность потока нейтронов, сильно зависят от его энергетического спектра. Традиционное решение здесь состоит в том, чтобы принудительно резко сузить спектр нейтронов, попадающих на детектор. Это делается с помощью замедлителей нейтронов и фильтров, которые, чаще всего, гасят скорость быстрых и промежуточных нейтронов до тепловой или, наоборот, отсекают всю тепловую составляющую нейтронного потока, например, с помощью кадмиевых фильтров. Но при этом возникает несколько проблем:

Во-первых, после замедлителя спектр нейтронов, конечно, сужается, но не до моноэнергетического, причём его форма и ширина зависят как от первоначальной формы спектра (до замедлителя), так и от свойств и толщины замедлителя. А чувствительность детектора и в этом узком диапазоне энергий не остаётся постоянной.

Во-вторых, часть нейтронов, попадающих в замедлитель, поглощается им, а часть рассеивается и не попадает в сам детектор. Точно определить какая доля нейтронов, попавших в замедлитель вокруг детектора, достигнет самого детектора практически невозможно.

В-третьих, замедлитель не только уменьшает скорость нейтронов, но и хаотизирует её направление из-за диффузии нейтронов. Поэтому на сам детектор, помещённый внутрь замедлителя, нейтроны могут падать со всех сторон. В то же время все нейтронные детекторы (особенно газонаполненные) чувствительны к их ориентации относительно направления потока нейтронов.

В-четвёртых, широко применяемые в качестве нейтронных детекторов газовые коронные счётчики на основе гелия-3 (при захвате нейтрона ядро ^3He превращается в ядро трития ^3H с испусканием протона, который и инициирует газовый разряд) весьма велики по габаритам. Это затрудняет создание одинаковых условий замедления нейтронов для всего объёма детектора при погружении его в замедлитель и, кроме того, накладывает ограничения на создание переносных приборов.

Все эти неопределённости пытаются преодолеть, производя градуировку прибора от образцового источника нейтронного излучения с известным спектром и известной плотностью потока. Но спектр реального измеряемого нейтронного потока не совпадает со спектром образцового потока, по которому производилась градуировка прибора. Из-за этого реальные погрешности для потока с неизвестным спектром могут в сотни раз превысить значения паспортных погрешностей.

Единственным путём кардинального повышения точности измерения интегральной плотности нейтронного потока при неизвестном его спектре является переход к спектральным измерениям с последующим вычислением интегральной плотности потока. Этим и обосновывается необходимость разработки спектрометра нейтронного излучения с вычислительным определением интегральной плотности потока и всех других измеряемых величин. Деление всего энергетического диапазона нейтронов на две или три полосы не решает данную задачу, поскольку реальные спектры нейтронных потоков имеют ширину в девять порядков. Такого деления недостаточно даже для дозиметров нейтронного излучения, предназначенных только для измерения эквивалентной поглощённой дозы, поскольку биологическое воздействие нейтронов очень сильно зависит от их энергии. А для исследования нейтронных полей ядерных реакторов необходимо определять усреднённую по не менее чем девяти спектральным полосам плотность потока, либо восстанавливать вычислительным путём непрерывное распределение спектральной плотности по результатам измерений потока с помощью нескольких детекторов, имеющих различные зависимости чувствительности от энергии нейтронов и в совокупности перекрывающих весь возможный энергетический спектр нейтронных потоков.

Таким образом, даже при измерении интегральной плотности нейтронных потоков с произвольным спектром необходимо переходить к спектральным измерениям, а затем уже по спектральной плотности потока вычислять его интегральную плотность. Только так можно избавиться от всех неопределённостей, возникающих при традиционных методах измерения интегральной плотности потока.

Наиболее приемлемыми для приборной реализации являются следующие методы измерения энергии нейтронов:

1. Восстановление спектра нейтронного потока по прямым измерениям энергии ядер отдачи. Главным образом, используются реакции с выделением протонов отдачи в водородных камерах, водородных счётчиках и сцинтилляционных спектрометрах, в основном, для спектрометрии быстрых

нейтронов из-за низкого разрешения данного метода. Снижения нижней границы энергетического диапазона удастся добиться только ценой ухудшения энергетического разрешения. Этот путь можно считать исчерпанным.

2. Восстановление спектра измеряемого нейтронного потока путём совместной вычислительной обработки результатов его измерений с помощью нескольких детекторов, избирательных к различным участкам энергетического спектра измеряемого потока. Данный метод широко используется в активационном анализе. Основным его недостатком является трудоёмкость измерительных процедур и низкая производительность. Это лабораторный метод и его реализация требует, как правило, нескольких суток для проведения одного цикла измерений.

3. Принудительное последовательное изменение конфигурации спектра измеряемого нейтронного потока путём погружения одного и того же детектора в замедлитель нейтронов на различную глубину с последующим вычислительным восстановлением формы исходного спектра. Этот путь реализован в многошаровом спектрометре Боннера и в весьма урезанном виде в радиометре-дозиметре нейтронного излучения МКС-03С. Возможности этого метода с одновременным погружением нескольких детекторов в замедлитель на различную глубину для ускорения измерений так же ограничены.

Таким образом, общий принцип построения спектрометрического радиометра должен состоять в совместной вычислительной обработке сигналов от многодетекторного блока детектирования, состоящего из оптимально подобранного набора детекторов с селективной чувствительностью в различных областях энергетического спектра нейтронов, с целью восстановления энергетического спектра измеряемого потока нейтронов. При этом в основу алгоритма восстановления спектра не должна закладываться определённая математическая модель спектра, определяющая его форму. Только в этом случае прибор будет способен достоверно измерять нейтронные потоки с любыми формами энергетического спектра, а значит, правильно вычислять и интегральную плотность потока, и все прочие показатели (мощность эквивалентной поглощённой дозы, накопленную эквивалентную поглощённую дозу и т.д.).

Для реализации такого прибора необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать все вещества, вступающие в ядерные реакции с нейтронами с испусканием заряженных частиц или квантов гамма-излучения или с образованием радиоактивных изотопов с малым периодом полураспада. Среди них необходимо отобрать такие, которые имеют максимумы сечений реакций на различных участках энергетического спектра.

2. Разработать математический метод и соответствующее программное обеспечение для восстановления спектрального распределения плотности измеряемых потоков нейтронов по данным, получаемым от выбранного набора детекторов.

3. Учитывая, что проведение экспериментальных исследований с различными наборами детекторов затруднены, необходимо разработать систему имитационного моделирования различных спектральных

распределений нейтронных потоков и их преобразования выбранным набором детекторов для обработки математического метода восстановления спектра по данным, получаемым от детекторов.

Точность восстановления спектра и математическая модель, по которой осуществляется это восстановление, будут зависеть от состава и степени оптимальности подбора детекторов в блоке детектирования. А это значит, что для каждого набора детекторов должна разрабатываться своя математическая модель восстановления спектров. Учитывая нелинейность и достаточную сложность спектральных функций чувствительности используемых детекторов и высокую вариабельность формы спектров измеряемых потоков нейтронов, получение математической модели восстановления спектров аналитическим путём затруднительно.

В полиномиальных моделях недостатками являются:

- для восстановления спектров сложных видов приходится использовать полиномы высоких степеней, а в многомерном пространстве это приводит к сложным моделям, включающим до нескольких десятков членов, для вычисления коэффициентов при которых необходимо проведение сотен независимых измерений;

- при взаимной корреляции входных информативных признаков (а она неизбежна) эти модели склонны к неустойчивости, а при сильной корреляции, и к невозможности вычисления коэффициентов, ввиду невозможности обращения матриц, близких к вырожденным;

- при недостаточных объёмах и представительности обучающих выборок, такие модели склонны воспроизводить «шум» данной выборки, что резко снижает прогностическую точность модели для новых данных, не используемых при обучении.

Методы, применяемые для построения спектров по показаниям многошаровых спектрометров, дают удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда измеряемые спектры имеют форму, близкую к типовой, которая закладывается в первичную математическую модель. Чем сильнее будут отличаться формы измеряемых спектров от типовой, тем более существенны будут погрешности восстановления.

Методы, реализующие ступенчатое восстановление (в частности, метод Трайса и Хартмана), т.е. определяющие усреднённые значения спектральной плотности для отдельных участков спектра являются наиболее простыми. Однако такие модели, являясь линейными, не могут адекватно отображать спектры с существенной вариабельностью формы.

Из всех современных статистических методов построения математических моделей сложных объектов наиболее пригодными для наших целей следует признать моделирование с помощью искусственных нейронных сетей. В последние годы данный метод получил существенное теоретическое и практическое развитие и начал широко применяться как для решения задач восстановления сложных зависимостей, так и для создания распознающих систем (зрительных образов, речи, и т.п.).

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (г/к 02.740.11.0050) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК 809.2010.8

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРОМЕТРОВ НЕЙТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.Э. Дрейзин, Е.П. Кочура, А.А. Гримов
Юго-западный государственный университет, г.Курск

Своевременное получение информации о динамике изменения потоков ионизирующих излучений является одним из главных требований для обеспечения безопасности эксплуатации ядерных реакторов. В настоящее время для этих целей широко используются радиометры-дозиметры, имеющие нормированную погрешность измерения мощности дозы и поглощённой дозы излучения в пределах 20-50 % в ограниченном интервале энергий излучения, соответствующем энергетическому интервалу образцовых источников излучения. Одним из главных недостатков таких приборов является непредсказуемое многократное возрастание погрешности измерения при исследовании потоков излучений с энергетическими спектрами, отличными от спектров поверочных источников. Для исключения этого эффекта необходим переход к спектрометрическим измерениям, позволяющим определить спектральную плотность излучения, с помощью которой легко получить интегральную плотность потока при различных формах энергетического спектра измеряемого излучения, что позволит резко уменьшить дополнительные погрешности измерения.

Основная проблема при измерении интегральной плотности нейтронного потока состоит в том, что не существует детекторов, имеющих одинаковую чувствительность к нейтронам любых энергий. Эта задача решается в настоящее время использованием многодетекторных систем.

В работе рассматривается один из подходов к построению прецизионного многодетекторного спектрометра-радиометра нейтронного излучения и его проверка с помощью тренировочных задач. Имитационное моделирование выполнялось на примере радиометра-дозиметра нейтронного излучения МКС-03С, с дополнительным введением в него нейронной сети, выполняющей совместную обработку выходных сигналов трёхканального блока детектирования БДКН-05С (по тепловым, промежуточным и быстрым нейтронам), входящего в комплект данного прибора. В приборе МКС-03С регистрация потока нейтронов осуществляется непосредственно по выходным сигналам трёх каналов детектирования, чтобы отдельно измерять плотность

потока быстрых, промежуточных и медленных нейтронов. Важно, что в приборе МКС-03С совместной обработки этих сигналов не производится.

Задача состояла в том, чтобы определить показания этого прибора в случае измерения моделей нейтронных потоков с известными спектрами. На первом этапе задавались самые простые формы спектров: максвелловские тепловых нейтронов для равновесных температур 300, 500, 700 и 1000 К, а также гипотетических потоков с линейно возрастающей и линейно падающей формами спектра.

Весь энергетический диапазон разделялся на девять десятичных интервалов, на каждом из которых из паспортной спектральной зависимости чувствительности каналов блока детектирования БДКН-05С определялись ее усреднённые значения. При этом значения этих чувствительностей представлены в нормированных к значению интегральной чувствительности канала измерения тепловых нейтронов единицах.

Хотя принято считать энергетический диапазон тепловых нейтронов от 0,025 эВ до 0,4-0,5 эВ, для удобства их верхняя граница была сдвинута до 2,5 эВ, чтобы она совпала с верхней границей второго десятичного интервала. Тогда энергетический спектр тепловых нейтронов при максвелловском распределении и эффективных средних температурах нейтронов от 300 до 1000 К занимает только два первых десятичных интервала. Таким образом, было принято следующее разделение каналов:

- канал тепловых нейтронов включает два первых десятичных интервалов энергий и имеет границы: 0,025...2,5 эВ;
- канал промежуточных нейтронов включает 5 десятичных интервалов энергий: 2,5...25 эВ, 25...250 эВ, 250...2500 эВ, 2,5... 25 кэВ и 25 ... 250 кэВ;
- канал быстрых нейтронов включает оставшиеся два десятичных интервала энергий: 0,25...2,5 МэВ и 2,5...25 МэВ.

К найденным интервальным значениям спектральных плотностей моделируемых потоков нейтронов прибавлялась случайная величина, распределённая по нормальному закону со среднеквадратическими отклонениями в 10 и 20 % от усреднённого значения спектральной плотности для данного десятичного интервала, которая имитировала вариабельность спектров по отношению к эталонной (заданной) форме. Всего по каждому исходному спектру генерировалось 30 реализаций, из которых 20 входили в обучающую выборку, а остальные 10 – в проверочную.

Затем определялись сигналы на выходах этих каналов при измерении любого из моделируемых потоков нейтронов. Они подсчитывались как сумма произведений средней плотности P_i данного потока на i -ом десятичном интервале на среднюю чувствительность S_i данного канала для того же десятичного интервала:

$$Q = \sum_{i=1}^9 P_i S_i . \quad (1)$$

Результаты расчётов по формуле (1) сигналов на выходах каналов тепловых, промежуточных и быстрых нейтронов и подсчитанные по ним

действительные значения плотностей тепловых, промежуточных и быстрых нейтронов, а также значения интегральной плотности измеряемого потока для реализаций, входящих в обучающую выборку, представляли собой массив данных, по которому производилось обучение нейронной сети. Благодаря тому, что входные потоки моделируются, то известны «истинные» значения спектральной плотности, как для каждого десятичного интервала и интервалов, определяющих тепловую, промежуточную и быструю составляющие нейтронного потока, так и интегральная плотность потока. Сравнивая их с ответами сети по каждому выходу и их сумме, определялись ошибки сети и, с использованием метода обратного распространения ошибки, проводилось обучение сети.

Для обучения и последующего распознавания спектров использовались нейронные сети последовательного распространения с одним промежуточным слоем двух конфигураций: а) с тремя входными нейронами, тремя нейронами в промежуточном слое и тремя нейронами в выходном слое, для измерения плотности потоков тепловых, промежуточных и быстрых нейтронов, результаты измерений которых должны формироваться на соответствующих трёх нейронах выходного слоя; б) с тремя входными нейронами, шестью нейронами в промежуточном слое и девятью нейронами в выходном слое, для измерения спектра входного потока нейтронов путём измерения плотности потоков нейтронов в девяти указанных десятичных интервалах энергии.

При использовании спектров нейтронов с формой близкой к форме обучающего спектра ошибка в распознавании не превышала нескольких процентов. Если обучение выполнялась по нескольким формам спектра нейтронов, то ошибка распознавания увеличивалась, но не превышала 20 %.

В то же время моделирование показаний прибора МКС-03С (без использования нейронных сетей) с различными моделями нейтронных потоков показало, что в лучшем случае, при измерениях потоков с максвелловским спектром, при котором весь поток состоит из тепловых нейтронов, прибор по каналу тепловых нейтронов имеет погрешность порядка 30 %. Но при этом по другим каналам вместо нулевых показаний выдаются показания, в несколько раз превышающие показания по каналу тепловых нейтронов. При других формах спектра, когда в потоке имеются нейтроны всех энергий, погрешности по всем каналам лежат в пределах от 800 до 6000 %.

После проверки предложенного подхода на простейших формах спектров обучение нейронных сетей и дальнейшее моделирование их работы выполнялось с использованием реальных спектров следующих групп источников нейтронного излучения:

- спектры источников нейтронов ^{235}U , ^{232}Cf , $\text{Ra} - \text{Be}$, $\text{Pu} - \text{Be}$.

- спектры потоков нейтронов утечки за границы активной зоны критических сборок – критической сборки ^{239}Pu с тонким отражателем из W_2C , критической сборки раствора UO_2F_2 , критической сборки ^{235}U с отражателем из ^{238}U , сборки из ^{235}U с никелевым отражателем.

- спектры потоков нейтронов из активной зоны ядерных реакторов – в вертикальных экспериментальных каналах ВЭК-6, ВЭК-10, ВЭК-11, ВЭК-12, ВЭК-13, ГЭК-2-1 – без фильтра, ГЭК-2-2 – со свинцовым фильтром, ГЭК-2-3 – с графитовым фильтром реактора ИРТ-2000; в вертикальных экспериментальных каналах ВЭК-5, ВЭК-13, ВЭК-14, ВЭК-1-1 реактора ВВР-К; в каналах Б-2 и Б-3 реактора на быстрых нейтронах БР-5;

- спектры рабочих мест персонала в защищённых зонах – представлены спектрами нейтронных потоков на рабочих местах персонала на следующих объектах Горно-химического комбината: реакторный цех, центральный зал; радиохимический завод; изотопно-химический завод.

- спектры потоков утечки нейтронов из защиты реакторов различных типов – реактора Наяда, реактора Рашель, водо-водяной реактора с различными видами защиты, тяжеловодного реактора Винча.

На основе результатов имитационного моделирования можно сделать следующие выводы:

1. Путём имитационного моделирования с использованием произвольно задаваемых и реальных видов энергетических спектров нейтронных потоков доказана высокая эффективность предлагаемого подхода к спектральным измерениям нейтронного излучения с использованием нескольких детекторов, обладающих различными спектральными характеристиками и совместно перекрывающих весь энергетический диапазон измеряемого излучения. Даже при использовании блока детектирования, имеющего всего три измерительных канала с явно недостаточной энергетической селективностью каждого из них удалось не только точно измерить плотности тепловых, промежуточных и быстрых нейтронов, но и усреднённые спектральные плотности на каждом десятичном интервале энергии в диапазоне энергий в девять десятичных интервалов (от 0,025 эВ до 25 МэВ).

2. Показана высокая эффективность искусственных нейронных сетей в качестве математического аппарата для вычислительного восстановления спектра измеряемого нейтронного излучения по показаниям нескольких детекторов с различными спектральными характеристиками чувствительности.

3. Разработанная методика имитационного моделирования обучающей и проверочной выборок на основе реальных энергетических спектров потоков нейтронов от различных источников, а также спектральных характеристик детекторов нейтронного излучения позволили продемонстрировать возможности и преимущества предлагаемого подхода построения спектрометра нейтронного излучения на примере трёхканального блока детектирования радиометра-дозиметра нейтронного излучения МКС-03С.

4. Необходимым условием эффективного обучения нейронных сетей восстановлению спектров измеряемых сигналов является нормирование реализаций обучающей и проверочной выборок. То есть при реализации прибора нужно учитывать, что выходные сигналы детекторов блока детектирования должны приводиться к единому масштабу.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (г/к 02.740.11.0050) и гранта

ПРИМЕНЕНИЕ ФОТОМЕТРА ЯРКОСТИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ О НАЛИЧИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МОРСКОЙ СРЕДЕ

С.Г. Иванов¹, В.Н. Носов¹, В.И. Погонин¹, Е.А. Зевакин¹,
А.С. Савин², А.М. Горелов², С.О. Леонов¹
¹ГЕОХИ РАН,

²Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Гидродинамические возмущения (ГДВ), возникающие в толще моря, могут вызывать изменение оптических свойств приповерхностного слоя морской среды. В свою очередь оптические свойства приповерхностного слоя морской среды обусловлены наличием в нем взвешенных частиц, в том числе фитопланктона и растворенного органического вещества. ГДВ вызывают изменение фонового распределения этих частиц по глубине. Данный факт может быть использован для регистрации ГДВ с помощью дистанционных оптических методов как в видимом, так и в ИК диапазонах. В литературе есть данные об использовании спутниковых изображений морской поверхности, полученных с помощью сенсоров цвета моря и тепловизоров, при исследовании динамики морских вихрей с поперечником 40-200 км в приповерхностном слое моря [1,2]. Имеются также сведения об использовании фотометра яркости моря, размещенного на борту судна и непосредственно на морской поверхности (плавающий фотометр) [3,4].

Для развития данного направления исследования моря большой интерес представляют эксперименты в условиях непосредственного контроля ГДВ, воздействующих на приповерхностный слой морской среды.

В настоящей работе представлены результаты исследования проявлений контролируемого ГДВ в приповерхностном слое воды, полученные с помощью специально разработанного 2-х канального фотометра яркости моря. В этом фотометре измеряется яркость моря $B_M(\lambda)$ на двух выбранных длинах волн 440 нм и 540 нм и затем вычисляется усреднённое отношение этих яркостей $\tilde{I} = B_M(440)/B_M(540)$. Длина волны $\lambda_1 = 440$ нм находится вблизи максимума полосы поглощения хлорофилла «а», содержащегося в фитопланктоне. Длина волны $\lambda_2 = 540$ нм попадает в спектральный диапазон, где поглощения хлорофилла «а» отсутствует. Величина отношения яркостей $\tilde{I}$ коррелирует с содержанием фитопланктона в приповерхностном слое моря. Располагая фотометр на подвижном носителе (корабле или летательном аппарате), можно

измерять распределение хлорофилла «а» по морской поверхности и, тем самым, обнаруживать воздействие ГДВ на поверхностные слои моря.

В разработанном фотометре в качестве аналитического сигнала используется отношение яркостей $\tilde{I} = B_M(440)/B_M(540)$, а не величина яркости $B_M(440)$, с целью уменьшения флуктуаций полезного сигнала, связанных с морским волнением и изменением потока солнечного излучения из-за облачности. При отстройке оси визирования фотометра от солнечного блика регистрируемая яркость моря $B_M(\lambda)$ состоит из двух частей:

$$B_M(\lambda) = B_T(\lambda) + r \cdot B_H(\lambda),$$

где $B_T(\lambda)$ – яркость полезного сигнала из толщи моря. Второй член, являющийся фоновым сигналом, связан с френелевским отражением излучения неба яркости $B_H(\lambda)$ от морской поверхности; r – коэффициент отражения морской поверхности.

Для уменьшения фонового неинформационного сигнала от неба в конструкции фотометра используется поляризатор, подавляющий отраженное морем излучение неба. При этом ось визирования фотометра располагается вблизи угла Брюстера ($\varphi_b = 53^\circ$).

Блок-схема фотометра представлена на рис. 1.

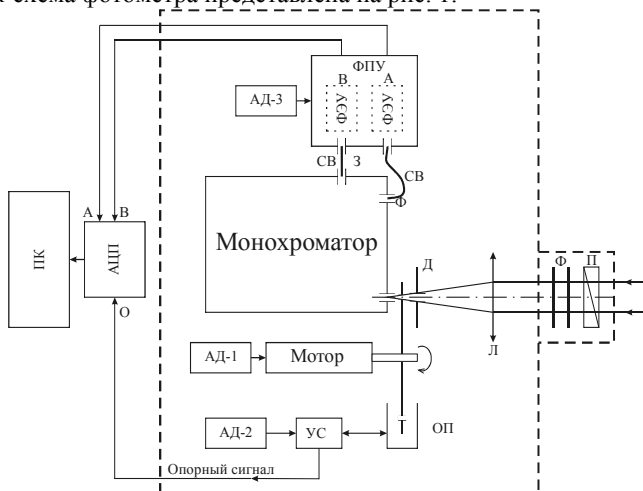


Рис. 1. – Блок-схема двухканального фотометра яркости моря

П – поляризатор; Ф – фильтры из цветного оптического стекла; Л – линза; Д – ограничительная диафрагма; ОП – оптопара, формирующая опорный сигнал; УС – усилитель сигнала фотодиода оптопары.

Излучение, попадающее в фотометр, модулируется с частотой 1.5 кГц с помощью вращающегося диска с прорезями, установленного перед входной щелью малогабаритного монохроматора. С двух выходных щелей излучение с длинами волн 440 нм и 540 нм по световодам подаётся на фотоприёмное

устройство (ФПУ), состоящее из двух фотоумножителей ФЭУ-114, усилителей и высоковольтного преобразователя.

Синхроимпульсы формируются оптопарой. Спектральное разрешение монохроматора составляет около 20 нм. Градуировка ФПУ, выполненная с помощью осциллографа С1-77 и селективного нановольтметра УНИПАН-232, оказалась линейной при изменении измеряемой величины сигнала почти на 5 порядков.

После оцифровки сигналов с помощью 12 разрядного аналогово-цифрового преобразователя (АЦП), они обрабатывались по программе синхронного детектирования. Эта программа позволяет вычислять среднее значения сигналов за заданное время накопления с вычетом шумов и выполнять деление средних значений сигналов с каналов А и В. Схема алгоритма обработки приведена на рис. 2.

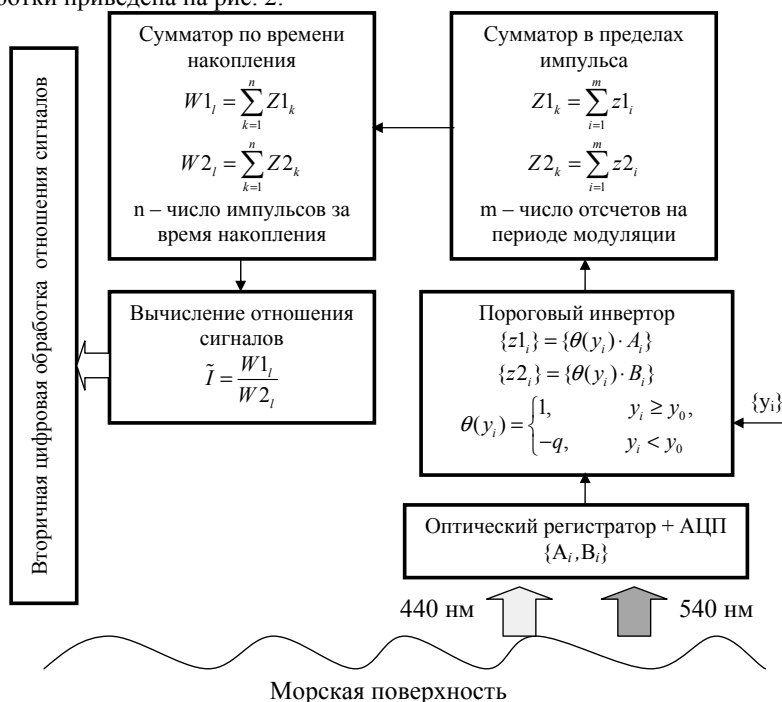


Рис. 2. – Схема алгоритма обработки сигналов фотометра

q – коэффициент скважности импульсов подсветки, определяемый отношением

$$q = t_1 / t_2,$$

где t_1 – длительность полезного сигнала, t_2 – длительность шумового сигнала;

y_0 – уровень сигнала для отсчета длительностей t_1 и t_2 ;

y_i – дискретные значения амплитуды синхроимпульсов, по которым вычисляется длительности полезного сигнала и шума, $i = 1, 2, \dots, n$ – целые положительные числа.

Как видно из приведенной схемы, алгоритм реализует идею вычитания собственного шума в отсутствии сигнала (между импульсами модуляции) из суммарного сигнала в момент открытия модулятора. Таким образом, в результате остается полезный сигнал, который когерентно (по амплитуде) накапливается и записывается в виде отдельных отсчетов для каждого канала. После накопления за время, определяемое пространственным масштабом ГДВ и скоростью движения носителя, производится деление значения накопленного сигнала канала А на значение накопленного сигнала канала В.

Измерения отношения яркостей $\tilde{I} = B_M(440)/B_M(540)$ выполнены при проведении натурных морских экспериментов с контролируемыми источниками ГДВ. Фотометр располагался на высоте 8 м над уровнем моря при удалении от берега на расстоянии около 500 м и при ориентации оси визирования фотометра вблизи угла Брюстера. В качестве источника ГДВ использовалась струя от погружного насоса с расходом $18 \text{ м}^3/\text{час}$. При горизонтальном направлении струи, находящейся на глубине 0.2 м, отношение сигналов А/В имело значение $\tilde{I} = 0.98 \pm 0.02$, в то время как при отсутствии струи эта величина равнялась $\tilde{I} = 1.33 \pm 0.06$. Таким образом, наличие ГДВ от затопленной струи привело к изменению отношения А/В на 30%.

Проведенные исследования показали эффективность применения двухканального фотометра яркости для выявления ГДВ в приповерхностном слое моря и перспективность использования информационного канала яркости при разработке новых средств регистрации ГДВ. Дальнейшие работы, проводимые в контролируемых условиях, позволят найти более точную количественную связь между различными параметрами ГДВ и сигналами фотометра.

Список литературы

1. А.И. Гинзбург, А.Г. Костяной, В.Г. Кривошея, Н.П. Незлин, Д.М. Соловьёв, С.В. Станичный, В.Г. Якубенко. Особенности динамики вод и распределения хлорофилла «а» в Сверно-Восточной части Чёрного моря осенью 1997г. // *Океанология*, 2000, т.40, №3, с.344-356.
2. Г.С. Карабашев, М.А. Евдошенко, С.В. Шеберстов. Анализ проявлений мезомасштабного водообмена на спутниковых снимках морской поверхности. // *Океанология*, 2005, т.45, №2, с.182-192.
3. Б.Ф. Кельбалиханов. Гидрооптические исследования в водах Мирового океана. Сыктывкар, 1992, 126 с.
4. В.А. Артемьев, В.И. Буренков, М.И. Вортман, А.В. Григорьев, О.В. Копелевич, А.Н. Храпко. Подспутниковые измерения цвета океана: новый

ВЫДЕЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ СИММЕТРИИ

В.Н. Носов¹, А.М. Горелов², С.Б. Каледин²,
В.А. Кузнецов¹, С.О. Леонов¹, А.С. Савин².

¹ГЕОХИ РАН,

²Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Возмущения от источников различной природы, локализованных как в морской среде, так и в приводном слое атмосферы, оказывают влияние на состояние взволнованной морской поверхности. Как правило, это влияние весьма слабое, поэтому непосредственная его регистрация на морской поверхности представляет собой весьма сложную задачу. В данной ситуации естественно использовать априорную информацию об источнике возмущения, которое должно быть зарегистрировано на фоне естественных ветровых поверхностных волн. Значительную ценность имеет информация о типах симметрии представляющих интерес возмущений. Например, прямолинейно движущаяся моторная лодка создает на поверхности моря возмущения, симметричные относительно оси её движения, точечный взрыв над морской поверхностью порождает на ней возмущения с круговой симметрией. Такая схема является приближенной и тем более точно отражает реальность, чем более однородны внешние условия.

Одним из эффективных методов регистрации характеристик морской поверхности является её сканирование узким лазерным лучом [1,2]. Суть метода состоит в следующем. При совпадении направления зондирующего лазерного пучка, двигающегося по морской поверхности и нормали к морской поверхности приемной оптической системой локатора регистрируется зеркальный блик. Величина отраженного бликового потока излучения, а значит, и амплитуда сигнала приемного канала зависят от радиуса кривизны водной поверхности в точке отражения. Из-за большой линейной скорости сканирования по поверхности воды сигналы локатора имеют форму коротких электрических импульсов, временное положение которых определяется пространственным распределением зеркальных точек на водной поверхности. Направление, под которым регистрируется зеркальный блик, определяется уклоном морской поверхности в данной точке. Таким образом, лазерный локатор позволяет регистрировать кривизну морской поверхности в

окрестности зеркального блика, пространственные параметры поверхностных волн и их уклоны.

В настоящей работе представлены результаты обработки сигнала судового сканирующего лазерного локатора, полученные в ходе эксперимента по пересечке отстающего следа судна в разные моменты времени.

Для обработки полученных данных использовался статистический подход. На первом этапе статистической обработки осуществлялось формирование массивов распределений (гистограмм) максимумов амплитуд сигнала локатора и их временных положений, затем формировались матрицы коэффициентов корреляции полученных гистограмм.

На рис. 1 показан участок матрицы коэффициентов корреляции для отстающего следа судна с возрастом ~ 1 час. На рисунке белой линией обозначено предполагаемое положение турбулентного следа, основным источником которого являются возмущения от вращающегося винта прошедшего судна. Слева и справа от него выделены участки ожидаемых поверхностных аномалий от корабельных волн, образующихся при обтекании корпуса судна. На правой стороне рисунка эти участки представлены отдельно в увеличенном масштабе и развернуты на 90 и 270 градусов.

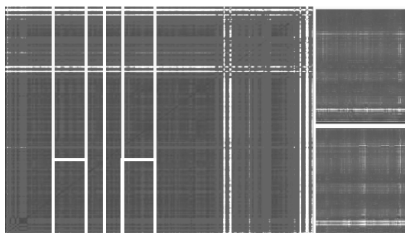


Рис. 1. Участок матрицы коэффициентов корреляции с симметричной структурой

На приведенном рисунке заметна симметричность выделенных участков а) и б) относительно турбулентного следа. Структура полос, которая видна на выделенных участках, обусловлена поверхностными аномалиями от воздействия корабельных волн. Более четко эта структура видна на правой стороне рисунка. Здесь заметна тонкая структура аномалий следа от корабельных волн в виде системы полос разной толщины и интенсивности. При сравнении структур правой и левой областей хорошо видно, что они симметричны относительно положения турбулентного следа. Последующая корреляционная обработка полученной матрицы явно выявляет симметрию выделенных структур. Выполняемая математическая операция – свертка левой стороны структуры следа с правой, при наличии симметрии, дает максимальной отклик в месте ожидаемого расположения аномалий от правой стороны цуга корабельных волн. Результат такой обработки представлен на рис. 2, где видны два корреляционных максимума, первый - от автосвертки левой стороны структуры следа и второй - от свертки левой стороны с правой.

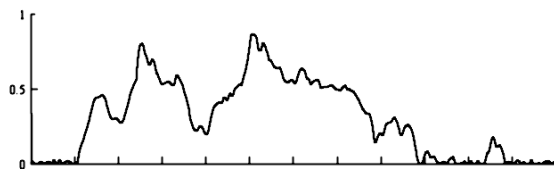


Рис. 2. Результат корреляционной обработки

Следует отметить, что по полученным таким образом данным, зарегистрированным при нескольких пересечениях отстающего следа судна с различными возрастами, можно получить достаточно точную информацию о его скорости, направлении движения и местоположении.

Список литературы

1. Ву Ж., Хаймбах С.П., Хсу Ю.Л. Сканирующий прибор для исследования ветровой ряби на поверхности моря. //Приборы для научных исследований. 1981, №8, с. 120-126.
2. Носов В.Н., Пашин С.Ю., Горелов, А.М., Каледин С.Б., Ильичев А.Т. Об использовании зеркально-бликовых отражений для дистанционной регистрации параметров морского волнения. /Материалы третьей Всероссийской конференции «Взаимодействие подводных возмущений с поверхностными волнами (гидродинамическая основа радиотомографии)», М.: Институт проблем механики РАН, 2004 г., с.10-12

МАТРИЧНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЪЕКТНО-РЕЛЯЦИОННАЯ БАЗА ДАННЫХ С ПОДДЕРЖКОЙ ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРЫ ЕДИНИЦЫ ИНФОРМАЦИИ

И. А. Микляев

Филиал СПбГМТУ «Севмашвтуз», г. Северодвинск

Введение

Современные тенденции развития систем управления базами данных (БД) является совмещение положительных качеств реляционных и объектных типов БД с максимальным исключением их недостатков.

Не упуская достоинства реляционных и объектных БД, отметим их основные недостатки.

Для реляционных БД в [1, с.934] приводятся следующие недостатки:

- Неадекватное представление сущностей реального мира;
- Однородная структура данных;
- Ограниченный набор операций;

- выполнением, изменениями схемы и неразвитыми средствами доступа.

Для объектных же БД [1, с.993]:

- Отсутствие универсальной модели данных;
- Отсутствие стандартов;
- Сложность;
- Отсутствие поддержки представлений;
- Недостаточность средств обеспечения защиты.

Нужно отметить, что причина сложности объектных БД в первую очередь кроется в потере однородности структуры, что приводит к недостатку реляционных БД.

В данной работе предлагается матричная универсальная объектно-реляционная структура базы данных, которая частично, а в некоторых случаях и полностью снимает приведённые недостатки.

Логическая модель универсальной БД (УБД).

В первую очередь при формировании универсальной информационной модели необходимо сформировать универсальную логическую модель БД. Её организация приведена в [2, с. 97] рис.1.

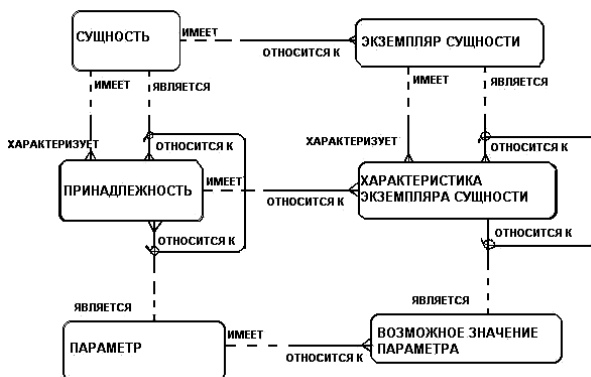


Рис. 1. Логическая модель универсальной базы данных

Хорошо видно, что в основу структуры УБД закладывается сама теория баз данных, что и делает данную модель универсальной.

Очевидно, что в случае использования УБД происходит перераспределение функций между разработчиком системы управления УБД (СУУБД), разработчиком приложения и пользователем ИС [2, с. 94]. Разработчик СУУБД получает возможность взять на себя все проблемы, связанные с организацией унифицированного ввода, изменения и удаления информации справочников системы. Разработчик приложения лишь создаёт

экранные формы для работы с исходящей информацией проекта по персональным требованиям заказчика, которые могут редактироваться и в унифицированной форме, и реализовывает функции системы. Пользователь получает возможность корректировать структуру информации и без участия разработчика приложения.

Главное преимущество системы – это возможность создавать работоспособное приложение с минимальным знанием предметной области, и реагировать на дальнейшее её изучение только корректируя содержимое УБД без изменения структуры.

Матричное представление УБД (МУБД)

При реализации УБД в матричном представлении в сущностях «Сущность» и «Экземпляр сущности» атрибутом является только первичный ключ. Все атрибуты выведены в сущность «Характеристика экземпляра сущности».

Сущность теории БД также является сущностью, она формируется по умолчанию при развёртывании УБД, экземплярами её являются сущности служебные разработчика СУУБД и сущности разработчика приложения.

Сущность «Параметр» есть экземпляр сущности «Сущность», а его возможные значения в сущности «Возможные значения параметра» размещаются в сущности «Характеристика экземпляра сущности».

Сущность «Принадлежность» реализуется в сущности «Характеристика экземпляра сущности» ссылкой на экземпляры сущности «Сущность» для формирования связей между сущностями.

Таким образом, получаем, что остаются только три сущности: Сущность; Экземпляр сущности; Характеристика экземпляра сущности.

Атрибуты сущности «Характеристика экземпляра сущности» следующие:

1. «Параметр» (ответ на второй вопрос);
2. «Значение» (ответ на третий вопрос).

Для придания максимальной эффективности при изменяющейся предметной области введены ещё два атрибута:

3. «Дата с» (время начала действия информации);
4. «Дата по» (время окончания действия информации).
5. «Номер родительского элемента» (поддержка древовидной структуры информации)

В итоге имеем массив УБД представленный на рис. 2.

```
ARRUDB : {массив УДБ}
    array of {БД}
    array of {Сущность}
    array of {Экземпляр сущности}
    array of {Информационная единица}
    array of {Строка информационной единицы}
    array[0..3] of {Атрибуты сущности "Характеристика экземпляра сущности" }
    array of byte; {массив атрибута}
```

Рис. 2. Структура матричного представления УБД

Универсальный тип данных

Основополагающим шагом в создании СУУБД является разработка универсального типа данных. В БД типа XML таким типом является строчный, что легко читается и обрабатывается, но очень громоздкий. Для работы с большими объёмами данных необходим универсальный тип, не уступающий стандартным типам.

В данной работе универсальный тип данных разработан на основе понижения системы счисления символов в поле базы данных, основанного на статистической информации об их использовании.

При сохранении информации формируется ключ поля, состоящий из последовательности символов задействованных в поле. Таким образом, получается меньшая кратность для хранения информации, соответствующая размеру ключа плюс 1.

Универсальное приложение для работы с УБД

Универсальное приложение для работы с УБД представляет собой всего две формы: форма администрирования УБД и рабочая форма доступа.

Информация таблиц отображается в трёх видах:

- табличное отображение (обычное реляционное представление),
- отображение информации экземпляра (строки) таблицы во вспомогательной таблице (объектно-ориентированное представление информации).
- отображение информации экземпляра (строки) таблицы в древовидной форме (объектно-ориентированное представление информации с поддержкой древовидной формы единицы информации)

Распределённый доступ к информации

В связи с тем, что данные в хранилище однотипные открывается перспектива структурировать их с точки зрения частоты обращения к ним. То есть разбить данные на группы, так чтобы наиболее часто используемые выгружались из хранилища в оперативную память в первоочередном порядке, средне используемые во втором и так далее. Для этого необходим статистический анализ обращений к той или иной информации в хранилище данных.

Физическое размещение информации

В матричной форме, объединив всю информацию УБД в единый файл, получаем эффективную возможность разделения его на части в соответствии с функциональным использованием, а так же исходя из статистики обращения к информации.

На первом этапе информация делится на основной массив и массив хранилищ тяжёлой информации, начиная от строчных типов и заканчивая изображениями, звуком и видео.

На физическом уровне основной массив также делится по частям, где в отдельно хранятся громоздкие элементы массива. Они в свою очередь также разделяются на равные части, что позволяет быстро обращаться к нужному элементу массива и при редактировании работать лишь с малой частью всей громоздкой совокупности.

Главным достоинством такой структуры физического размещения является то, что функции разделения информации можно передать математической модели, учитывающей параметры системы. Таким образом, перераспределение информации происходит динамически, и система сама подбирает наиболее эффективное разделение. Не малую роль имеет и постоянный статистический мониторинг, который позволяет подстраиваться системе к параметрам, которые не учтены моделью.

Список литературы

1. Конноли Т., Бегг К. Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика. Изд. 3-е :Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. С.1440
2. Микляев И.А., Ундозерова А.Н., Кудяева М.В., Универсальная логическая модель базы данных. // Вестник Поморского Университета 1/2010. Сер. «Естественные науки» - С. 93-99.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ И ЖИДКОЙ СРЕД

Д.А. Приказчиков, В.Я. Томашпольский
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Данная работа посвящена построению асимптотической модели поверхностной волны на границе упругой изотропной и идеальной жидкой сжимаемой сред в плоской постановке. Работа является продолжением исследований в рамках асимптотических моделей поверхностных волн [1]-[5] и является обобщением модели для волны Рэлея на случай волны на границе упругой и жидкой сред, впервые исследованной в работах Шольте [6] и Гоголадзе [7]. Полученная асимптотическая модель ориентирована на выделение вклада волны Шольте-Гоголадзе в общую динамическую картину в приповерхностных слоях и позволяет существенно упростить постановку ряда граничных задач и получить решение в явной аналитической форме. Решение неоднородной граничной задачи находится в терминах гармонических функций, что роднит данную работу с [8] и предшествующими работами [9], [10].

Приведем постановку задачи. Направим ось вдоль границы между средами, тогда упругая полуплоскость задается условием $y \geq 0$, а жидкая среда определяется неравенством $y < 0$.

Уравнения движения в терминах потенциалов имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где φ, ψ – упругие потенциалы, χ – потенциал жидкой среды, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн в упругой среде, соответственно, а c_0 – скорость звука в жидкой среде.

Граничные условия на интерфейсе $y=0$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \\ \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = P(x; t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $P(x; t)$ – заданная нагрузка, λ, μ – параметры Ламэ, ρ_0 – плотность жидкой среды.

Производя замену переменных $\xi = x - c_{Sch}t, \tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$), что соответствует возмущению задачи в медленном времени, и строя асимптотический процесс по аналогии с [2], получим асимптотическую модель для поверхностной волны на границе упругой и жидкой сред.

Поведение внутри области при этом описывается квази-статическими эллиптическими уравнениями для потенциалов.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + k_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где $k_m^2 = 1 - \frac{c_{Sch}^2}{c_m^2}$, ($m = 0, 1, 2$), а c_{Sch} – скорость волны Шольте-Гоголадзе.

На границе $y=0$ получим гиперболическое уравнение для одного из потенциалов

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{Sch}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = AP(x; t), \quad (4)$$

где постоянная A зависит от физических параметров сред, и соотношения между потенциалами на границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1+k_2^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{1-k_2^2}{1+k_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5)$$

Таким образом, полученная асимптотическая модель (3)–(5) представляет собой совокупность двух задач Дирихле и одной задачи Неймана, что является существенным упрощением по сравнению с исходной постановкой задачи.

Благодарность.

Исследования первого автора выполнены в рамках гранта Президента РФ поддержки молодых ученых МК-4234.2010.8.

Список литературы

1. Каплунов Ю. Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель дальнего поля волны Релея в случае упругой полуплоскости // ДАН 2004. Т. 395, вып. 4. С. 482-485.

2. *Kaplunov, J., Zakharov, A., Prikazchikov, D. A.*, 2006, Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves // IMA J. Appl. Math., Vol. 71, pp. 768–782.
3. *Мухомодьяров Р.Р., Приказчиков Д.А.* Асимптотическая модель волны Релея в случае трансверсально-изотропной упругой полуплоскости // Материалы международной конференции «XVIII сессия между-народной школы по моделям механики сплошной среды» – Саратов: Изд-во СГУ. 2007. С. 210-213.
4. *В.Г. Мицкевич, Д.А. Приказчиков*, Применение асимптотической модели волны Стоунли к задаче о подвижной нагрузке на упругой полуплоскости. // Наука и техника транспорта, №3, 2008, С. 94–98.
5. *Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D. A.*, 2010, A long-wave model for the surface elastic wave in a coated half-space // Proc. Roy. Soc. A, V. 466, P. 3097–3116, doi:10.1098/rspa.2010.0125.
6. *Schölte J. G.* The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves // Roy. Astron. Soc. Lond., Month. Not. Geophys. Suppl.– 1947.– V. 5, N 3.– P. 120–126.
7. *В.Г. Гоголадзе*. Волны Рэлея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства. // Труды Сейсмологического института Академии наук СССР, 1948, №127, С. 27-32.
8. *Kiselev A. P., Parker, D. F.*, 2010, Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence // Proc. R. Soc. A, V. 466, pp. 2241–2258.
9. *Chadwick, P.*, 1976, Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media // J. Elast., Vol. 6, pp. 73–80
10. *Friedlander, F. G.*, 1948, On the total reflection of plane waves // Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 1, pp. 376–384.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ

Д.А. Приказчиков

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Статья посвящена построению асимптотической модели поверхностной волны в случае упругого полупространства с тонким покрытием. Данная модель является обобщением асимптотической модели для упругой полуплоскости, построенной в работе [1]. Обобщение на трехмерный случай производится с помощью преобразования Радона, см. [2]. Представление решений в терминах гармонических функций роднит данную модель с работой [3].

Рассмотрим постановку задачи. Упругое полупространство задано неравенством $x_3 \geq h$, а покрытие расположено в области $0 \leq x_3 \leq h$. Запишем

уравнения движения для упругого, изотропного тела и закон Гука (с суммированием по повторяющимся индексам)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1)$$

В данной работе мы будем обозначать механические постоянные, соответствующие покрытию индексом '0'. Запишем граничные условия на поверхности $x_3 = 0$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -P(x_1, x_2, t), \quad (2)$$

где P – заданная функция нагрузки. Иллюстрация постановки задачи приведена на Рис. 1.

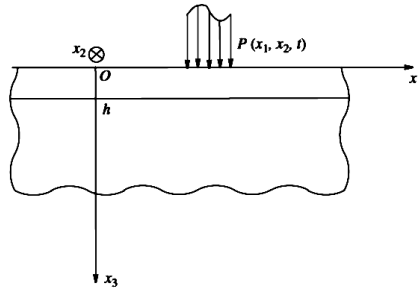


Рис 1. Постановка задачи.

Вводя асимптотически малый параметр на основе предположения о том, что длина волны является большим параметром,

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1, \quad (3)$$

где L – характерная длина волны, граничные условия (2) могут быть приведены к поверхности $x_3 = h$ с помощью процесса асимптотического интегрирования [4] и переписаны в терминах компонент перемещения. Получим

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{20}^2 \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + 4(1 - \kappa_0^2) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (3 - 4\kappa_0^2) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] = 0, \quad (4)$$

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -P(x_1, x_2, t), \quad 1 \leq i \neq j \leq 2,$$

см. также [5] о физическом подходе к задаче. Здесь ρ_0 – плотность покрытия, $c_{20} = \mu_0 / \rho_0$ – скорость сдвиговой волны в покрытии, а $\kappa_0 = c_{10} / c_{20} = 2 + \lambda_0 / \mu_0$ где λ_0, μ_0 – параметры Ламэ покрытия.

Предполагая, что заданная нормальная нагрузка не возбуждает антиплоское движение, и применяя интегральное преобразование Радона, исходная трехмерная постановка задачи сводится к двумерной для образов перемещений, что приводит задачу к виду, аналогичному рассмотренному в работе [1]. Строя асимптотический процесс возмущением в медленном времени, и возвращаясь к исходным перемещениям трехмерной задачи, получаем асимптотическую

модель для поверхностной волны. Построенная модель включает в себя эллиптические уравнения для потенциалов

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + k_1^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_3^2} + k_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad k_i^2 = 1 - \frac{c_R^2}{c_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

описывающие поведение внутри полупространства. На границе $x_3 = h$ имеем гиперболическое уравнение для одного из потенциалов

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{bh}{k_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{1+k_2^2}{2\mu B} P(x_1, x_2, t), \quad (6)$$

где постоянные, зависящие от механических параметров полупространства и покрытия, имеют вид

$$B = \frac{k_1}{k_2} (1 - k_2^2) + \frac{k_2}{k_1} (1 - k_1^2) - (1 - k_2^4), \quad b = \frac{\mu_0}{2\mu B} (1 - k_2^2) [(1 - k_2^2)(k_1 + k_2) - 4k_2(1 - \kappa_0^{-2})], \quad (7)$$

и соотношения между потенциалами

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{1+k_2^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{1+k_2^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \quad (8)$$

Компоненты перемещения в терминах потенциалов имеют вид

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}. \quad (9)$$

В полученной модели динамический фактор зависимости от времени имеется только в гиперболическом уравнении (6), при этом уравнения (5), описывающие поведение внутри области, являются квази-статическими. Заметим также, что в случае отсутствия покрытия ($h=0$) из полученных результатов непосредственно следует асимптотическая модель для волны Релея для случая упругого полупространства. Также отметим, что наличие производной по нормальной переменной в уравнении (6) показывает, что его можно представить в терминах псевдо-дифференциального оператора, таким образом, наличие покрытия влечет за собой интегро-дифференциальные уравнения на границе.

Полученная модель является эффективной в решении задач для заданных нагрузок, включая различные ударные задачи и задачи о подвижной нагрузке.

Благодарности.

Автор благодарит д.ф.-м.н., проф. Каплунова Ю.Д. за плодотворные обсуждения. Исследования поддержаны грантом Президента РФ поддержки молодых ученых МК-4234.2010.8.

Список литературы

1. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D. Explicit models for the elastic and piezo-elastic surface waves. IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 71, 2006, pp. 768–782.
2. Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D. A. A long-wave model for the surface elastic wave in a coated half-space. Proceedings of the Royal Society London A., vol. 466, 2010, pp. 3097–3116.

3. Kiselev A. P., Parker, D. F. Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence. Proceedings of the Royal Society London A, vol. 466, 2010, pp. 2241–2258.
4. Goldenveizer, A. L., Kaplunov, J. D. & Nolde, E. V. On Timoshenko–Reissner type theories of plates and shells. International Journal of Solids and Structures. vol. 30, 1993, pp. 675–694.
5. Tiersten, H. F. Elastic surface waves guided by thin films. Journal of Applied Physics, vol. 40, 1969, pp. 770–789.

АНАЛИЗ СИСТЕМ КООРДИНАТ ДЛЯ ГИПЕРВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Я.Л. Арцишевский, Т.Г. Климова, А.И. Расщепляев
Московский энергетический институт (технический университет)

Переходные процессы в электроэнергетических системах описываются в разных ситуациях аperiodическими и синусоидальными (затухающими и незатухающими) сигналами. Синусоидальными сигналами или воздействиями называются переменные напряжения и токи, которые аналитически можно записать с помощью синусоидальной функции в синусной или косинусной форме

Незатухающее синусоидальное (гармоническое) колебание описывается дифференциальным уравнением [1]

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1)$$

величина ω называется циклической частотой. Решением данного уравнения является выражение $x(t) = a \cos(\omega t + \alpha)$, где a – амплитуда, α – начальная фаза колебания. Запись решения дифференциального уравнения в виде $x(t) = a \sin(\omega t + \alpha')$ является равноправной.

Дифференциальное уравнение (1) описывает гармонические колебания любой природы, механические и электрические.

Для многих задач удобно представление гармонического колебания в виде комплексной амплитуды

$$Xe^{j(\omega t + \alpha)} = a \cos(\omega t + \alpha) + j a \sin(\omega t + \alpha) = Xe^{j\omega t}. \quad (2)$$

Величина $\dot{X}$ является комплексной амплитудой. Если рассматривать комплексную амплитуду как комплексное число в алгебраической форме, то действительная часть соответствует косинусной компоненте, а мнимая — синусной компоненте исходного сигнала. Комплексная амплитуда $\dot{X}$ соответствует положению двумерного вектора на комплексной плоскости проекций для $t=0$, на комплексной плоскости в полярных координатах отображается амплитуда и фаза гармонического колебания. При описании комплексной амплитуды в декартовых координатах косинусная компонента представляет собой проекцию на действительную ось, а синусная компонента — проекцию на мнимую ось.

Любой синусоидальный сигнал может быть описан либо в синусной либо в косинусной форме, например

$$x(t) = X_m \sin(\omega t) = X_m \cos(\omega t + \pi/2). \quad (3)$$

Представление этого сигнала на комплексной плоскости (рис.1) будет разным, поскольку синусная форма есть мнимая часть комплексной амплитуды и поэтому проецируется на мнимую ось, а косинусная – действительная часть комплексной амплитуды и проецируется на действительную ось комплексной плоскости.

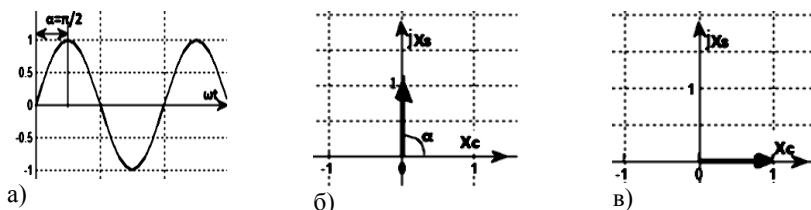


Рис.1. Представление синусоидального сигнала а) на комплексной плоскости в косинусной б) и синусной в) форме.

Затухающее колебание имеет еще один параметр - постоянную времени затухания, поэтому полностью описать сигнал в координатах действительной и мнимой части комплексной плоскости не представляется возможным.

Затухающее колебание любой природы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta \dot{x}, \quad (4)$$

имеющее характеристическое уравнение $p^2 + 2\beta p + \omega_0^2 = 0$, корни которого вычисляются по формуле

$$p_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm j\omega. \quad (5)$$

Решение данного уравнения можно также представить в синусной и косинусной форме

$$x(t) = X_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha') = X_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (6)$$

В начальный момент времени это колебание также может быть представлено в векторном виде на комплексной плоскости аналогично колебанию (3), рис.1, однако при этом теряется информация о затухании данного колебания.

Корни характеристического уравнения представляют собой комплексную частоту [3], которая определяет комплексную плоскость частоты, по действительной оси которой откладывается затухание β , а по мнимой – циклическая частота колебания ω .

Если совместить комплексную плоскость проекций и комплексную плоскость частоты удастся сохранить информацию о всех четырех параметрах затухающего синусоидального колебания, при этом сформируется плоскость двух систем координат. Вектор на плоскости двух систем координат будет иметь размерность, равную 4, поэтому для отличия его от двумерного вектора

(рис.1) целесообразно дать ему название, например, гипервектор [4], а плоскость называть гипервекторной. Такая форма графического представления таких непериодических электрических величин была предложена в [4].

На двухсистемной комплексной плоскости начало вектора определяется значением затухания и циклической частоты и устанавливается в масштабе осей плоскости комплексной частоты, длина вектора определяется в масштабе комплексной плоскости проекций. Для связи систем координат служит фаза комплексной амплитуды. Для правильного отображения фазы необходимо, чтобы масштабы по действительным и мнимым осям были одинаковы в каждой системе координат. Не требуется равенства масштабов между системами координат.

Представление затухающего колебания в косинусной и синусной формах в двухсистемной комплексной плоскости показано на рис.2.

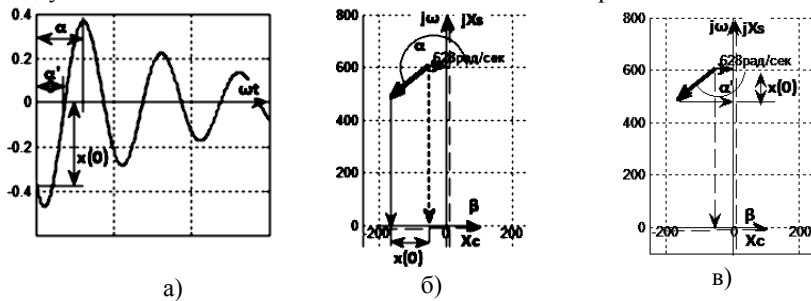


Рис.2. Представление затухающего колебания а) на комплексной плоскости в косинусной б) и синусной в) форме.

На рисунке 2 отображается затухающее колебание с параметрами

$$x(t) = 0.5 e^{-50t} \sin(2\pi 100t + \alpha') = 0.5 e^{-50t} \cos(2\pi 100t + \alpha) \quad (7)$$

Задано значение $\alpha' = -3\pi/4$, а угол $\alpha = 5\pi/4$ определяется, как ближайший к моменту времени $t=0$ максимум [2].

Различие двух форм представления колебательного сигнала во времени дает различие представления в гипервекторной плоскости, состоящее в используемой проекции на оси для получения информации о мгновенных значениях и определении фазового сдвига.

Апериодический сигнал записывается в виде $x(t) = X_m e^{-\beta t}$ (рис.3,а), эта запись соответствует косинусной форме представления и отображается по действительной оси гипервекторной плоскости (рис.3,б). Начало вектора расположено в точке заданного значения β , частота $\omega=0$, эти значения относятся к осям комплексной частоты. Длина вектора определяется в масштабе осей плоскости проекции, а направление по действительной оси задается знаком начального значения.

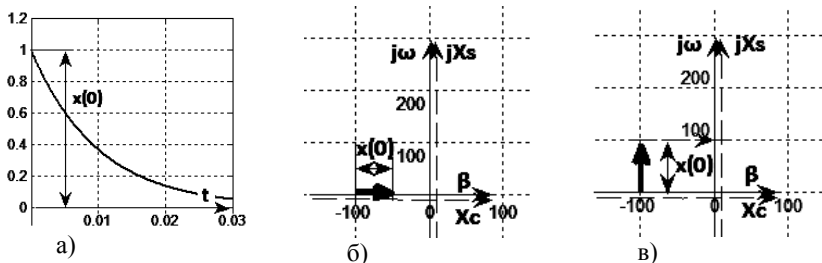


Рис.3. Представление аperiodического сигнала в гипервекторной плоскости.

Для представления аperiodического сигнала необходимо считать его мнимым сигналом и направлять его по мнимой оси (рис.3,в). Начало вектора также определяется заданным значением β , частота ω также равна нулю, но направление задается по мнимой оси в соответствии со знаком начального значения.

Как известно, теоретические расчеты формы кривой электрических токов и напряжений в линейных системах в условиях переходных процессов, могут быть представлены в форме суммы затухающих колебательных составляющих

$$i(t) = \sum_{k=1}^n I_k e^{-\beta_k t} \cos(\omega_k t + \alpha_k) = \sum_{k=1}^n I_k e^{-\beta_k t} \sin(\omega_k t + \alpha'_k). \quad (8)$$

Аperiodический сигнал ($\omega_k=0$) и незатухающий синусоидальный сигнал ($\beta_k=0$) являются частными случаями в записи (8).

Из материалов доклада можно сделать следующие выводы:

1. Имеются два способа представления колебаний в комплексной плоскости двух систем координат (гиперплоскости), которые определяются косинусной или синусной формой записи затухающих и не затухающих колебаний. Данное представление дает информацию о всех параметрах колебания: амплитуде, частоте, фазе и затухании;

2. Принцип соответствия при построении гиперплоскости выполняется, так как общеизвестное векторное представление незатухающих синусоидальных сигналов одной фиксированной частоты на комплексной плоскости проекций является частным случаем гипервекторного представления при $\beta=0$;

3. Графическое изображение четырехмерных гипервекторов существенно улучшает визуализацию аварийной информации в электроэнергетических системах.

Статья подготовлена по результатам НИР в рамках Государственного контракта П466 Программы НК-2009-2013г. Рособразования.

Список литературы

1. *Фриш С.Э., Тиморева А.В.* Курс общей физики, т.1: Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1952., 560 с.

2. A.G. Phadke and J.S. Thorp, Synchronized Phasor Measurements and Their Applications, ISBN 978-0-387-7653-8, Springer Science+Business Media, LLC, 2008

3. Атабеков Г.И., Мамиконянц Л.Г. Применение комплексных схем замещения для расчета переходных процессов. Электричество. 1949. № 4. С.67-68.

4. Арцишевский Я.Л. Гипервекторное представление неперiodических несинусоидальных электрических величин // Известия вузов. Электромеханика. 1978. № 8. С.817-821.

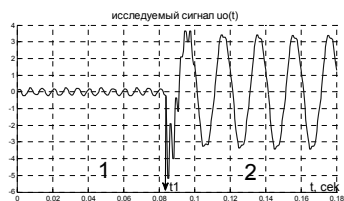
ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Т.Г. Климова, А.И. Расщепляев

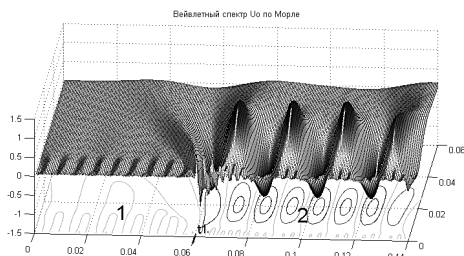
Московский энергетический институт (технический университет)

От правильности и своевременности управленческих решений зависит эффективность управления, а, следовательно, и эффективность производства, передачи и потребления электроэнергии. Поэтому особую важность для решения многих задач в электроэнергетике имеет получение высокоточных параметров переходных процессов в режиме реального времени. Следует отметить, что переходные процессы в электроэнергетике в основном носят нестационарный характер, т.е. частотный состав сигнала изменяется во времени случайным образом. Для анализа таких процессов целесообразно использовать вейвлет - преобразование.

Применение вейвлет - преобразования иллюстрируется с помощью реального переходного процесса $u_0(t)$ на одной из подстанций Нижнего Новгорода (рис.1, а). Для наглядности исследуемый процесс разделен на два участка «до возмущения» (1) и «после возмущения» (2).



а)



б)

Рис.1. Исследуемый переходной процесс $u_0(t)$ – а и его волновой спектр – б.

Действительная часть комплексного волнового (вейвлетного) спектра, полученного в результате вейвлет – преобразования, $u_o(t)$ показана на рис. 1,б. На волновом спектре хорошо прослеживается частотно – временное разделение сигнала: до возмущения было напряжение небаланса, а после возмущения появляется составляющая промышленной частоты и затухающая во времени колебательная составляющая. Параметры всех составляющих определяются с применением комплексного вейвлета Морле.

Также практический интерес имеют проекции волнового спектра. В данной работе применяется проекция спектра на плоскость ab с изолиниями (скейлограмма), что позволяет выявить картину локальных экстремумов этих поверхностей, так называемый «скелет» структуры анализируемого процесса.

Для иллюстрации возможностей вейвлет-преобразования рассматривается оценка параметров переходного процесса на каждом из участков.

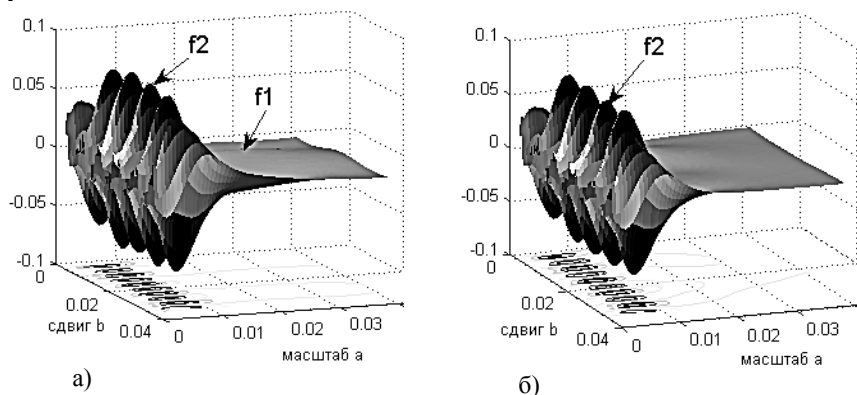
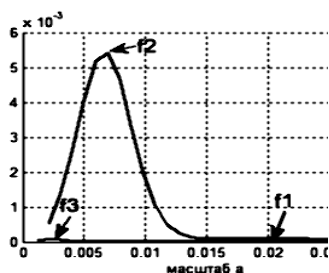
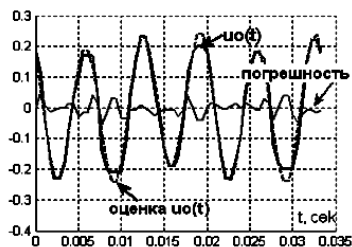


Рис.2. Действительная часть волнового спектра $u_o(t)$ до возмущения: a – анализируемого сигнала; b – сигнала после удаления основной гармоники.

Волновой спектр анализируемого сигнала (рис.2,а) и скейлограмма данного процесса (рис.3,а) показывают, что сигнал содержит две гармонические составляющие. Оценка параметров первой составляющей дает следующие значения: амплитуда – $0,0340 \text{ o.e.}$, частота – $50,9055 \text{ Гц}$, фаза – $3,7033 \text{ рад}$. После восстановления синусоидального сигнала первой частоты производится его вычитание из исходного переходного процесса. Волновой спектр результирующего сигнала представлен на рис.2,б. Видно, что точность оценки первой гармоники достаточно высока, т.к. в волновом спектре практически осталась только вторая составляющая.



а)

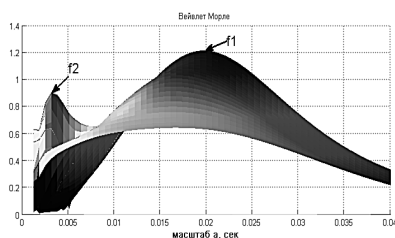


б)

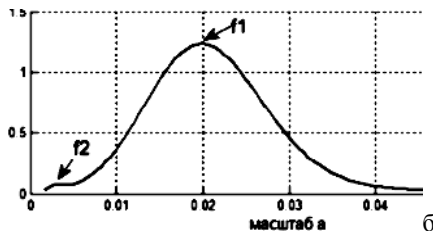
Рис.3. Скэйлограмма волнового спектра процесса до возмущения – а и результаты оценки параметров – б.

Оценки параметров второй составляющей f_2 (амплитуда – 0,2256 о.е., частота – 149,8895 Гц, фаза – 3,9429 рад) позволяют представить ее временную зависимость. Сумма двух восстановленных составляющих (пунктирная линия, рис.3,б) сравнивается с анализируемым сигналом (сплошная линия, рис.3,б), видна погрешность, которая не является строго периодической. Скэйлограмма волнового спектра этого процесса, показанная линией f_3 на рис.3, а, дает средний период (указано стрелкой f_3) процесса, примерно равный 0,0025, т.е. на период этой частоты приходится 4 интервала дискретизации. Этого не достаточно для анализа таких процессов. Можно только оценить среднее значение – 0,0029 о.е. и дисперсию – $4,8103 \cdot 10^{-4}$.

Для оценки параметров процесса после возмущения используются первые 0,035с. Модуль волнового спектра (рис. 4,а), развернутый в пространстве, показывает, что процесс содержит две колебательные составляющие на частоте f_1 и f_2 .



а)



б)

Рис.4. Модуль волнового спектра процесса $u_0(t)$ после возмущения – а и его скэйлограмма – б.

Наличие двух колебательных составляющих подтверждается и скэйлограммой этого процесса (рис. 4,б). Хорошо видна составляющая с максимумом на масштабе $a=0,02$ (соответствует промышленной частоте 50 Гц), имеется плохо выраженная составляющая колебательного переходного процесса при $a \approx 0,003$, это соответствует $f_2 \approx 333$ Гц.

На рис.4,а колебательная составляющая с частотой f_2 выражена ярче, поскольку отмечается максимальное значение, а не энергия быстро заканчивающегося за время наблюдения сигнала (рис.4,б).

Оценка параметров первой гармоники дает следующие значения: амплитуда – 3,54о.е., частота – 49,73Гц, фаза – 2,26рад.

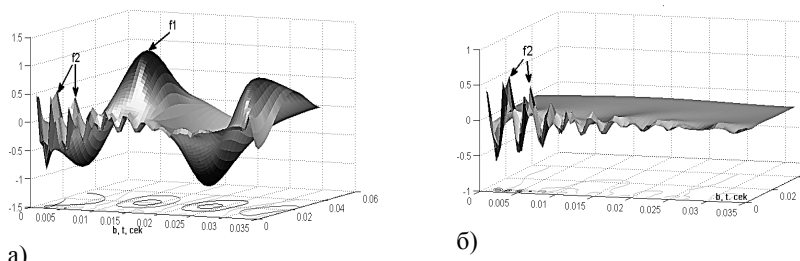


Рис. 5. Действительная часть волнового спектра $u_o(t)$ после возмущения: *а* – анализируемого сигнала; *б* – сигнала после удаления основной гармоники.

После восстановления синусоидального сигнала первой частоты производится ее вычитание из исходного переходного процесса. В результате данного действия получен новый волновой спектр, который представлен на рис.5,б. Видно, что точность оценки первой гармоники достаточно высока, т.к. в волновом спектре осталась только вторая составляющая.

После оценки второй составляющей (f_2) (амплитуда – 1,85о.е., частота – 354,21Гц, затухание – (-0,010), фаза – 4,6рад) восстанавливается исходный сигнал. На рис.6 представлен результат оценки. Кривые достаточно близки.

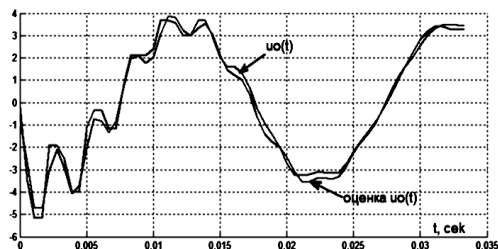


Рис.6. Результат оценки сигнала после возмущения.

Для количественной характеристики точности оценки параметров составляющих переходного процесса возможно определять значение разности между истинным процессом и его восстановленным представлением, а при необходимости и задавать ее.

Проведенный анализ показывает, что:

1. Вейвлет-преобразование является наглядным способом исследования переходных процессов;

2. Правильный выбор вейвлета и его параметров позволяет получить точные оценки параметров переходных процессов.

Статья подготовлена по результатам НИР в рамках Государственного контракта П466 Программы НК-2009-2013г. Рособразования.

Список литературы

1. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлет - анализ и его приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 176 с.
2. *Астафьева Н.М.* Вейвлет – анализ: основы теории и примеры применения. – Успехи физических наук, 1996, т.166, № 11, стр. 1145-1170.
3. *Витязев В.В.* Вейвлет анализ временных рядов: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. – 58с.
4. *Климова Т.Г., Расщепляев А.И.* Оценка параметров переходных процессов в электроэнергетике с помощью вейвлета – преобразований// тезисы Всероссийской научно-практической конференция «Повышение надежности и эффективности эксплуатации электрических станций и энергетических систем». М.: МЭИ (ТУ), 1-3 июня 2010. Т.2. – С. 162-165.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В.В. Зуев, А.Г. Шмелева

Московский государственный университет приборостроения и информатики

Рассмотрим в рамках осесимметричной задачу о нормальном ударе бойка цилиндрической формы по преграде конечной толщины. Материалы преграды и ударника представляют собой деформируемые упруго-пластические среды с усложненными свойствами. Предположим, что ось z направлена вертикально вверх против направления скорости удара и является осью симметрии, начало отсчёта z от тыльной поверхности преграды, ось r ей ортогональна.

Уравнения движения, соотношения, вытекающие из закона Гука и соотношения обобщенного ассоциированного закона [1], дают следующую систему для десяти дифференциальных уравнений, относительно десяти неизвестных функций u_r , u_z , S_r , S_z , S_{rz} , p , ε_r^p , ε_z^p , ε_θ^p , ε_{rz}^p описывающую динамическое поведение системы ударник-преграда:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial S_r}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} &= \frac{2S_r + S_z}{r}, \\
\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial S_z}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{S_{rz}}{r}, \\
\frac{\partial S_r}{\partial t} + 2G \left(B_r C_r - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2GB_{rz} C_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2GB_{rz} C_r \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2G \left(B_z C_r + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -2G \left(B_\theta C_r + \frac{1}{3} \right) \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial S_z}{\partial t} + 2G \left(B_r C_z + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2GB_{rz} C_z \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2GB_{rz} C_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2G \left(B_z C_z - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -2G \left(B_\theta C_z + \frac{1}{3} \right) \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial S_{rz}}{\partial t} + 2GA_{rz} B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + G(2A_{rz} B_{rz} - 1) \frac{\partial u_z}{\partial r} + G(2A_{rz} B_{rz} - 1) \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2GA_{rz} B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -2GA_{rz} B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial p}{\partial t} - K(1 + DB_r) \frac{\partial u_r}{\partial r} - KDB_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - KDB_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - K(1 + DB_z) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= K(1 + DB_\theta) \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} - A_r B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_r B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_r B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_r B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_r B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial t} - A_z B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_z B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_z B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_z B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_z B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t} - A_\theta B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_\theta B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_\theta B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_\theta B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_\theta B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} - A_{rz} B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_{rz} B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_{rz} B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_{rz} B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_{rz} B_\theta \frac{u_r}{r},
\end{aligned}$$

где ρ – плотность среды, K – коэффициент объемного сжатия, G – модуль сдвига,

$$\begin{aligned}
A_r &= \frac{H}{H_\varepsilon} \left(\frac{S_r}{F} - \frac{F'}{3} \right), & B_r &= \frac{2GS_r}{F} - KF', & C_r &= \frac{HS_r}{H_\varepsilon F} \\
A_z &= \frac{H}{H_\varepsilon} \left(\frac{S_z}{F} - \frac{F'}{3} \right), & B_z &= \frac{2GS_z}{F} - KF', & C_z &= \frac{HS_z}{H_\varepsilon F} \\
A_\theta &= \frac{H}{H_\varepsilon} \left(\frac{-(S_r + S_z)}{F} - \frac{F'}{3} \right), & B_\theta &= \frac{-2G(S_r + S_z)}{F} - KF', \\
A_{rz} &= \frac{HS_{rz}}{H_\varepsilon F}, & B_{rz} &= \frac{2GS_{rz}}{F}, & D &= \frac{HF'}{H_\varepsilon}
\end{aligned}$$

S_r, S_z, S_{rz} – компоненты девиатора тензора напряжений,

$\varepsilon_r^p, \varepsilon_z^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_{rz}^p$ – компоненты тензора пластических деформаций,

$F' \equiv \frac{\partial F}{\partial p}$, p – первый инвариант тензора напряжений (давление),

$$H = H_1 H_2, \quad H_1 = H_1(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi = 0, \\ 0, & \psi < 0, \end{cases} \quad H_2 = H_2(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi > 0, \\ 0, & \psi \leq 0. \end{cases}$$

Функция упрочнения в пространстве деформаций H_ε в рассматриваемом случае имеет вид:

$$H_\varepsilon = 2G + K(F')^2 - \frac{F'}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r^p} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_z^p} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta^p} \right) + \\ + \frac{1}{F} \left[S_r \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r^p} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta^p} \right) + S_z \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_z^p} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta^p} \right) + 2S_{rz} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{rz}^p} \right]$$

Функция $\psi = \sqrt{2(S_r^2 + S_z^2 + S_r S_z + S_{rz}^2)} - F$; $\psi = 0$ является обобщенным условием Мизеса-Шлейхера, F – функция, определяющая актуальный предел текучести, $\dot{\psi} = d'\psi / dt$ [1].

Функцию F будем задавать в виде [1]:

$$F = kp + C_0 - \alpha \sqrt{I_2^p},$$

где $p = K(\theta - \theta^p)$, $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}$ – полная объёмная деформация, $\theta^p = \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p$ – объёмная пластическая деформация, C_0 – предел текучести в случае идеальной пластичности Мизеса.

Положительным значениям α соответствует разупрочнение, отрицательным α – упрочнение, а при $\alpha = 0$ имеет место идеальная пластичность. Коэффициент k – коэффициент, обусловленный углом внутреннего трения принимается равным 0.001 (см. работу [1]).

На рис. 1 представлен вид поверхности нагружения для пространства напряжений, на рис. 2 – для пространства деформации.

Представленная выше система легла в основу созданной прикладной программы, моделирующей динамическое поведение системы ударник-преграда. Решение поставленной задачи проводилось с помощью метода конечных элементов.

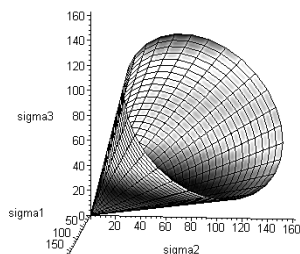


Рис. 1

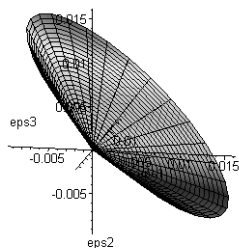


Рис. 2

Введем следующие обозначения в плоскости симметрии (Рис. 3): $V1$ – область ударника с границей $\Sigma1 \cup \Sigma2 \cup \Sigma3$; $\Sigma1 \cup \Sigma2$ – свободная от усилий граница, $\Sigma3$ – контактная граница ударника и мишени; $V2$ – область, занятая мишенью с границей $\Sigma4 \cup \Sigma5 \cup \Sigma6$ – свободной от усилий.



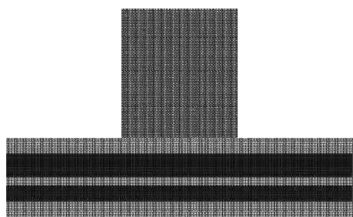


Рис. 4

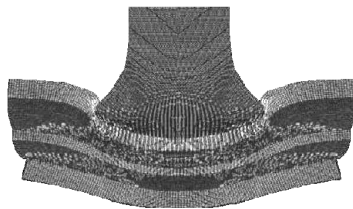


Рис. 5

В работе представлено решение задачи о распространении волн напряжения в континууме с включенными слоями. Разработанная программа позволяет подробно исследовать волновые движения в упруго-пластических континуумах с необратимыми объемными деформациями на примере ударного взаимодействия двух тел цилиндрической формы. На основе проводимых численных расчетов с использованием модифицированного метода конечных элементов получена полная информация о состоянии континуума с включенными слоями.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-00425-а.

Список литературы

1. *В.В. Зуев*, Определяющие соотношения и динамические задачи для упруго-пластических сред с усложненными свойствами. – М.: ФМ. – 2006. – 174 с.

СЕКЦИЯ №6
Внедрение современных физических и математических
методов в учебный процесс

О ПУТЯХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ
ОЦЕНКИ УСПЕВАЕМОСТИ СТУДЕНТОВ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

А.Ю. Аникин, В.Г. Крапоткин, Г.А. Кокотушкин
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Внедрение системы кредитов по типу ECTS - европейской системы перезачета кредитов учебных курсов, является надлежащим средством крупномасштабной студенческой мобильности. «Кредиты могут быть получены и в рамках образования, не являющегося высшим, включая обучение всей жизни, если они признаются принимающими заинтересованными университетами». ECTS – постоянно корректирующаяся система [1]. Использование системы упрощает для вузов признание результатов обучения студентов через применение механизмов, общих и понятных для всех, - кредитов и оценок. В основу ECTS положены три элемента: информация о математических программах обучения и результатах работы студента, соглашение между вузами - партнерами и студентом, обозначение объема работы студента по математическим дисциплинам [2]. Кредиты ECTS указывают на то, какая часть годовой работы приходится на данный математический учебный модуль. В ECTS 60 кредитов означают работу за академический год обучения, объем которого в часах в Европе колеблется от 1500 до 1800. Таким образом, 1 кредит составляет 25-30 астрономических часов. Семестр, длительностью, как правило, 20 недель означает работу студента объемом в 30 кредитов.

Решение Коллегии Минобрнауки России от 1 февраля 2007 г. по вопросу «О разработке нового поколения государственных образовательных стандартов и поэтапном переходе на уровневое высшее профессиональное образование с учетом требований рынка труда и международных тенденций развития высшего образования» [http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_07/mpk-1.html], рассматриваются отдельные методологические вопросы в логике структуры макета ФГОС ВПО, подходы к формированию, которого одобрены решением упомянутой коллегии, а также предлагаются обоснования для представления проектов ФГОС ВПО на экспертизу и утверждение.

Федеральные государственные образовательные стандарты призваны стать стандартами нового поколения, обеспечивающими дальнейшее развитие уровневого высшего профессионального образования с учетом требований рынка труда. Отличительными особенностями ФГОС ВПО являются:

- выраженный компетентностный характер;
- разработка пакета стандартов по направлениям как совокупности образовательных программ бакалавра, специалиста и магистра, объединяемых на базе общности их фундаментальной части;
- обоснование требований к результатам освоения основных образовательных программ (результатов образования) в виде компетенций, подразделяемых на общие (универсальные) и профессиональные (предметно-специализированные);
- отсутствие компонентной структуры (федерального, национально-регионального, вузовского) с одновременным значительным расширением академических свобод высших учебных заведений в части разработки основных образовательных программ; установление новой формы исчисления трудоемкости в виде зачетных единиц вместо часовых эквивалентов.

Модуль: комплекс учебных занятий, отличающийся содержательным, методическим, организационным, оценочным, технологическим и временным единством, имеющий, как дисциплинарный, так и междисциплинарный характер.

Зачетная единица: студентоцентрированное исчисление учебной нагрузки (трудоемкости), необходимой для достижения целей, результатов и компетенций, определенных образовательной программой.

Используемые понятия в терминологическом пространстве стандартов должны быть суждениями о наиболее общих и одновременно существенных отличительных признаках явления (объекта) и соотноситься с принятыми или используемыми в международной педагогической теории и практике. Примем во внимание, что зачастую в европейской высшей школе не сложилось общеупотребительных определений (компетенция, результаты образования, модуль).

Вводимая в отечественных вузах система зачетных единиц в методологическом и количественном планах в целом совместима с ECTS - Европейской системой переноса и накопления кредитов. Это позволяет высказать три рекомендации.

Во-первых, учебная нагрузка студентов состоит из времени, которое необходимо для завершения всех видов учебной деятельности (посещение лекций, выполнение проектов, экзамены и т.п.).

Во-вторых, зачетные единицы назначаются всем компонентам ООП (модулям, учебным циклам и дисциплинам, производственной практике и т.д.).

В-третьих, разработчикам ФГОС и ООП желательно ознакомиться с конструктивным Руководством пользователя ECTS.

В общих требованиях к условиям реализации основных образовательных программ, ФГОС ВПО представляется необходимым переформулировать как требования к ООП следующие вопросы:

- насколько технологичным будет соответствующий учебный план кафедры?

- как математическая программа сбалансирована по отношению к содержанию, зачетным единицам, модулям, результатам, методам преподавания, обучения и оценивания, формам получения образования и образовательным технологиям; материальному, кадровому, методическому обеспечению?

Например, при подготовке выпускников по математическим направлениям/специальностям следует применять многообразные реактивные и проактивные методы оценки, письменные экзамены без подготовки, выполнение листа задач, различные виды портфолио, и т.п. Важно понять, что применение результатов образования, компетенций, модулей, зачетных единиц и реализация студентоцентрированной направленности образовательного процесса востребует существенного расширения всего инструментария (средств, форм) оценивания достижений студентов и выпускников, его обновления.

Можно предложить при разработке требований к ООП (и далее при проектировании собственно ООП) составлять таблицы соотношений между: навыками (компетенциями), с одной стороны, и методами, стратегиями преподавания и обучения, с другой; структурой образования (учебные циклы, учебные дисциплины, модули) и требованиями, адресованными студентам для получения соответствующих зачетных единиц. Полезными могут оказаться своеобразные карты формирования результатов образования и компетенций в учебных дисциплинах и модулях образовательной программы на каждом из уровней высшего образования, в которых соотносятся учебные математические дисциплины (модули) и индексированные компетенции (например, A1, A2..., B1, B2..., C1, C2... и т.д.). Подобные карты имеют многофункциональное предназначение. Они, во-первых, ориентируют преподавателей на понимание роли каждой учебной дисциплины (модуля) и дают I системное (целостное) представление об образовательном процессе; во-вторых, содействуют совершенствованию системы обеспечения качества; в-третьих, усиливают роль самоконтроля студентов.

В том, что касается распределения зачетных единиц по учебным циклам и учебным дисциплинам (модули), то здесь главным представляется вопрос: как назначать зачетные единицы?

Здесь важно соблюсти ряд положений.

Во-первых, назначение зачетных единиц по различным элементам ООП требуется обосновывать реалистическими оценками учебной нагрузки (трудоемкости) студентов. На чем основывается подобного рода оценка? Только на расчетах меры трудоемкости, которая требуется типичному (среднему) студенту для достижения установленных результатов образования. Европейская практика в области применения ECTS предписывает необходимость систематических проверок исходных назначений предметам зачетных единиц, «собирая и анализируя поступающую снизу вверх информацию о реальной учебной нагрузке студентов». Установленные в отечественных стандартах часовые

эквиваленты не имеют ничего общего с объективными расчетами учебной нагрузки (трудоемкости) по тем или иным учебным дисциплинам.

Во-вторых, недопустимо, чтобы количество зачетных единиц связывалось с так называемыми «контактными» часами. Надо согласиться с европейскими рекомендациями, что непосредственной связи между контактными часами и зачетными единицами не существует.

В третьих, нельзя «привязывать» количество зачетных единиц к статусу или престижу учебного цикла и учебной дисциплины.

В Российской Федерации зачетной единицей, определяющей объем работы студента и преподавателя является академический час, длительность которого определена Типовым положением о вузе и составляет 45-50 мин. Основные образовательные программы высшего профессионального образования рассчитываются исходя из объема учебной работы студента в неделю – 54 академических часа при средней аудиторной нагрузке – 27 академических часов за весь период обучения (за исключением физической культуры). Как и в Европе, такая мера работы студента не характеризует в целом и по отдельным дисциплинам объем лекционных, семинарских занятий, количество лабораторных и практических работ, объем самостоятельной работы студента.

Целью разрабатываемой рейтинговой системы является комплексная оценка качества учебной работы студентов при освоении ими основных образовательных программ по математическим дисциплинам. Оценка качества учебной работы студента в рейтинговой системе является кумулятивной (накопительной) и используется для управления образовательным процессом и решения других вопросов по усмотрению кафедры. Главные задачи рейтинговой системы заключаются в :

- повышении мотивации студентов к освоению математических программ путем более высокой дифференциации оценки их учебной работы;
- повышении уровня организации образовательного процесса на кафедре.

Разработанную кафедрой рейтинговую систему следует вводить всем преподавателям по всем математическим дисциплинам основных образовательных программ (на начальном этапе возможно введение рейтинговой системы по одной или нескольким основным математическим программам). Разработанная кафедрой рейтинговая система формируется единой для всех задействованных в эксперименте преподавателей и вводится одновременно на кафедре, обеспечивающих основную образовательную программу. Рейтинговая система стимулирует регулярную самостоятельную учебную работу студентов в семестре по математическим дисциплинам. С этой целью суммарную рейтинговую оценку по дисциплине целесообразно формировать из рейтинговой оценки качества самостоятельной работы в семестре и рейтинговой оценки на промежуточной аттестации по математической дисциплине в семестре.

Рейтинговая система предусматривает поощрение студентов за хорошую работу в семестре проставлением «премиальных» баллов с возможностью получить семестровую оценку без сдачи экзаменов или зачетов. При этом целесообразно ограничить проставление оценки без прохождения промежуточной аттестации баллом не выше «хорошо» и предусмотреть для получения оценки «отлично» обязательное прохождение промежуточной аттестации. Наиболее целесообразна разработка рейтинговой системы, учитывающей трудоемкость всех учебных дисциплин через, так называемые, «зачетные единицы». В этом случае успешность работы студента в семестре по каждой дисциплине оценивается одинаковой максимальной суммой баллов (например, 100 баллов = «100-%ный успех»). Система зачетных единиц позволяет достаточно легко выводить кумулятивную рейтинговую оценку, в том числе и по дисциплинам, изучаемым в 2-3 семестрах, и за все время обучения. Для каждого студента возможен расчет суммарного количества баллов и определение места, которое занимает студент в группе, на курсе, в вузе. Шкала оценок по отдельным модулям, блокам, разделам и т.д. каждой учебной дисциплины разрабатывается кафедрой и сообщается студентам в начале каждого семестра. Возможно использование варианта системы, в котором из 100 баллов по дисциплине, до 60 баллов выставляется за текущую работу в семестре и от 20 до 40 – за экзамены и зачеты. При получении на промежуточной аттестации оценки ниже 20 баллов выставляется «неуд» и требуется повторная сдача. Для получения допуска к экзамену или зачету студент должен в семестре набрать не меньше 40 баллов. Для организации постоянного текущего контроля и управления учебным процессом в вузе все кафедры регулярно в течение семестра (3-4 раза на «контрольных» неделях) передают в деканаты сведения по рейтинговым оценкам студентов и заполняют соответствующую форму единой ведомости для текущего контроля и промежуточной аттестации, используемую в течение всего семестра. Рейтинговая система должна реализовываться с применением «электронного университета», которая собирает и обрабатывает информацию.

В заключение нужно отметить, что при разработке требований к подготовке бакалавров, магистров, специалистов в ФГОС ВПО важно предусмотреть соблюдение следующих этапов проектирования ООП:

- определение того; где «находятся» (как идентифицируются) результаты образования (с учетом, европейской системы квалификаций высшего образования, национальной системы квалификацией, Дублинских дескрипторов, дескрипторов TUNING, образцов лучшей отечественной и международной практики и т.п.);
- описание общих (универсальных) и профессиональных (предметно-специализированных компетенций);
- соотнесение результатов образования и компетенций;
- формулирование дескрипторов степеней (квалификаций) при помощи категории компетенций (раздельно для степеней бакалавра, магистра,

специалиста);

- установление трудозатрат на основании результатов образования (трудоемкость не обязательно должна исчисляться в объеме 54 часов в неделю; например, на старших курсах трудоемкость может быть установлена 45 часов. В целом трудоемкость может колебаться между 1800 и 1500 часами, одинаково равными 60 зачетным единицам).

- дифференцирование уровней (глубины знаний) по таким, например, параметрам, как «знание», «понимание», «применение», «анализ», «синтез», «оценка»;

- проектирование систем оценивания (ориентация на результаты образования влечет за собой новые методы преподавания, обучения, оценивания, использование моделирующих упражнений, тестов на пригодность, групповых дискуссий, презентаций и т.п.);

- выбор средств документирования компетенций и результатов образования (в дополнение к традиционным [экзаменационным ведомостям, отечественным приложениям к дипломам, зачетным книжкам).

Список литературы

1. *Сазонов Б.А., Сазонова Ю.Б.* Актуальность и возможные перспективы создания российской государственной системы образовательного кредитования: Сб. науч. докл. – М.: Изд-во МГУ, 2004.

2. *Касевич В.Б., Светлов Р.В., Петров А.В., Цыб А.В.* Болонский процесс. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2004. – 108 с.

О НЕКОТОРЫХ ПРИЁМАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАЧЁТНОЙ ЕДИНИЦЫ И ЕЁ ЧАСОВЫХ ЭКВИВАЛЕНТОВ.

Н.Т. Вилисова, Г.А. Кокотушкин

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Зачетные единицы характеризуют объем содержания образовательной программы и трудоемкость ее освоения студентом. В зарубежных образовательных системах эквивалентом термина «зачетная единица» является термин «кредит». Впервые кредиты были введены в университетах США в рамках начавшегося в этот период процесса либерализации университетского образования и перехода к новой парадигме обучения. Установление через кредитные единицы количественных эквивалентов содержания обучения и степени освоения образовательных программ позволило предоставить студентам возможность самостоятельно планировать учебный процесс, внести принципиальные изменения в системы контроля и оценки качества

образовательного процесса, создало условия для совершенствования и диверсификации образовательных технологий [1, 2].

Характерный для многих университетов возможный подход к определению трудоемкости математических дисциплин в зачетных единицах на основе часовых эквивалентов, представлен в табл. 1.

Вариант определения трудоемкости учебной дисциплины в зачетных единицах

Таблица 1

1 зач. ед. =	1 час лекции + 2 часа самостоятельных работ в неделю + другие виды учебной работы по данной дисциплине в течение одного семестра (подготовка реферата, расчетная работа, домашние задания и т.п., экзамен, зачет) 2 часа семинарских работ + 1 час самостоятельной работы в неделю + другие виды учебной работы (аудиторная работа, реферат, графико-расчетная работа, домашнее задание, экзамен, зачет) 2 часа лабораторных работ + 1 час самостоятельной работы в неделю + другие виды учебных работ (аудиторная работа, реферат, графико-расчетная работа, домашнее задание, экзамен, зачет)

Следует иметь в виду, что реальная автономия университетов способствует независимому от органов государственного регулирования развитию их образовательных систем, вследствие чего конкретные параметры организации учебного процесса по математической подготовке в разных университетах могут существенно различаться. Поэтому говорить об общности конкретной университетской модели системы зачетных единиц для математических дисциплин можно лишь с определенной степенью условности.

Пример 1. Если учебным планом по математической дисциплине предусматривается 1 лекция в неделю (2 часа в неделю), 1 семинарское занятие и одна лабораторная работа 1 раз в две недели (по 1 часу в неделю), то в случае успешного изучения данной дисциплины в течение семестра студенту засчитывается три ($2 + 0,5 + 0,5 = 3$) зачетные единицы. При этом он будет иметь по данной дисциплине недельную аудиторную нагрузку в объеме 4 ак. часа и выполнять самостоятельную работу в объеме 5 ак. часов в неделю, за которую он должен регулярно отчитываться перед своим преподавателем.

Подчеркнем, что обязательное планирование содержания самостоятельной работы студентов, дифференциация ее объема по формам учебных занятий, принципиальная возможность дифференциации соотношения между часами аудиторной и самостоятельной работы по учебным дисциплинам в зависимости от применяемой преподавателем педагогической методики, регулярный контроль выполнения домашних заданий для самостоятельной работы – все это важная особенность системы зачетных единиц при математической подготовке.

Для контроля текущей самостоятельной работы студентов преподавателю-математику выделяется аудитория на весь семестр. Время обязательной работы преподавателя-математика со студентами в выделенной аудитории, как правило, составляет 40% от планового фонда времени самостоятельной работы студента по математической дисциплине.

Пример 2. В примере 1 планируемый фонд времени самостоятельной работы студента по математической дисциплине трудоемкостью 3 кредита составляет 5 часов ($4+0,5+0,5$). Преподавателю-математику для контроля самостоятельной работы студента будет выделена аудитория из расчета 2 часа в неделю, и он должен в ней присутствовать и работать с той же степенью обязательности, как на лекциях и других занятиях.

Из определения в табл. 1 следует, что для получения одной зачетной единицы студент должен в течение семестра еженедельно заниматься по 3 академических часа. В течение семестра студентам ведущих университетов мира в среднем необходимо изучать учебные дисциплины суммарной трудоемкостью 15 зач. ед. Из норматива средней суммарной трудоемкости дисциплин семестра, составляющей 15 зач. ед., следует норматив еженедельной учебной нагрузки студента – 45 часов. При нормативной длительности семестра 20 недель 1 зач. ед. зачетной единицы в европейской системе соответствует 60 часов учебной работы в семестр.

Соотнесение приведенного определения зачетной единицы (кредита) по европейской системе с нормативными сроками освоения основных образовательных программ позволяет получить нормативные значения количества зачетных единиц, которое должен осваивать студент в течение учебного года (30 зач. ед.) и в течение всего срока обучения в университете. Для получения степени бакалавра по европейской системе студент должен набрать за нормативный 4-летний срок обучения 120 зач. ед., степени магистра (6 лет) – 180 зач. ед.

МГТУ им. Н.Э. Баумана после присоединения к Болонской декларации ориентируется в перспективе на использование европейского стандарта определения зачетной единицы (*European Credit Transfer System – ECTS*). Так, например, американская и европейская системы зачетных единиц легко сопоставляются друг с другом. Если опустить нюансы, то одна зачетная единица в американской системе может быть приравнена 2 зачетным единицам

европейской системы, из чего следует, что для получения одной зачетной единицы по европейским стандартам студент должен в течение семестра еженедельно заниматься по 1,5 часа, или 30 часов в течение 20-недельного учебного семестра. Таким образом, в европейской системе для получения степени бакалавра студент в течение нормативного 3-летнего срока обучения должен набрать 180 зач. ед., 4-летнего срока – 240 зач. ед. Нормативная трудоемкость магистерских программ составляет: для 1-годичных программ – 60 зач.ед., для 2-годичных – 120 зач. ед.

Несмотря на простоту приведенных в табл.1 соотношений, пересчет трудоемкости образовательных программ из зачетных единиц в выраженные в часах суммарные объемы аудиторных, самостоятельных и других видов учебной деятельности неоднозначен и зависит от особенностей организации учебного процесса и образовательных технологий, реализуемых в конкретных университетах в рамках предоставленных им академических свобод. Эта неоднозначность обуславливается возможными отличиями учебного графика, образовательными методиками, используемыми средствами и технологиями оценки результатов, уровнем компьютеризации технологий предъявления учебной информации и контроля результатов образовательной деятельности, уровнем использования дистанционных технологий и т. д. С учетом приведенного замечания можно сформулировать и кратко обсудить ряд выводов, важных для определения подходов к установлению соответствия между образовательными программами, трудоемкость которых выражается в академических часах и зачетных единицах.

Таким образом, зачетная единица может определяться через эквивалентное количество часов аудиторных учебных занятий традиционной образовательной технологии и организации учебного процесса (см. табл. 1), но при переходе к системе зачетных единиц это не должно ограничивать права вуза реализовывать учебный процесс в любой другой технологии, отличной от традиционной.

Т.е., сопоставление идентичности образовательных программ по математике, реализуемых в различных образовательных технологиях, не может основываться на сопоставлении показателей суммарной длительности в академических часах аудиторных и других учебных занятий, характерных для традиционной технологии и организации учебного процесса в российских вузах.

В качестве меры эквивалентности образовательных программ по математике могут использоваться лишь показатель длительности учебного года в неделях без деления их на учебные и экзаменационные и выраженные в академических часах суммарные показатели еженедельной учебной нагрузки студента без деления на часы аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов.

Перечисленные показатели составляют основу установления нормативов, длительности освоения образовательных программ по математике,

закрепляемых в образовательных стандартах нового поколения наряду с нормативами трудоемкости образовательных программ, выражаемых в зачетных единицах. Соотношение этих нормативов и является основой для пересчета из часов в зачетные единицы показателей трудоемкости освоения как образовательной программы в целом, так и её составляющих: учебных дисциплин, циклов дисциплин, учебных практик, творческих, выпускных и других работ.

При таком подходе выраженная в зачетных единицах трудоемкость любого элемента образовательной программы по математике - учебной дисциплины, выпускной работы, учебной практики и т. д. – в общем случае не имеет своего выраженного в часах эквивалента. Она указывает лишь, какова доля этого элемента относительно показателя общей трудоемкости образовательной программы по математике. Аналогично, набранное студентом за определенное время обучения количество зачетных единиц не определяет выраженное в часах количество выполненных им учебных занятий. Оно определяет лишь, какая доля образовательной программы им освоена – например, 90 зачетных единиц из требуемых 240 для получения степени бакалавра. В этом и состоит важнейшее качественное отличие зачетных единиц от часов как меры трудоемкости образовательных программ.

В контексте отмеченных качественных особенностей зачетных единиц разумной и прагматичной выглядит методика пересчета учебных планов из часов в зачетные единицы. Суть методики сводится к следующим положениям:

В качестве исходных для выполнения расчетов принимаются действующие учебные планы и параметры их реализации при традиционной организации учебного процесса.

Суммарная трудоемкость дисциплин каждого из четырех годовых учебных планов (например) бакалаврской подготовки приравнивается к 60 зач. ед.

Определяется доля учебных часов каждого элемента учебного плана (учебной дисциплины) в годовом бюджете учебного времени и в соответствии с этими долями 60 зач. ед. распределяются между дисциплинами учебного плана.

Полученные дробные значения калибруются, то есть округляются до целых значений при условии, что сумма зачетных единиц по всем дисциплинам годового учебного плана остается равной 60 зач. ед.

Но и этот подход не лишен недостатков. В конечном итоге при реализации учебного плана в зачетных единицах в традиционном учебном процессе неизбежны расхождения, пусть и незначительные, параметров учебного процесса. Поэтому в основу образовательных стандартов третьего поколения целесообразно положить не часы, а зачетные единицы, которые при необходимости просто и точно пересчитываются в часовые эквиваленты.

Совершенствование образовательных технологий по математическим дисциплинам и педагогических методик не может иметь целью сокращение устанавливаемых государственными образовательными стандартами

нормативных сроков освоения образовательных математических программ. Оно должно служить повышению эффективности учебного процесса, включая повышение эффективности преподавательского труда, достижение более глубокого освоения знаний умений и навыков, устойчивых результатов в формировании общих и специальных компетенций будущего инженера-математика.

В этой связи укажем еще на одну на важнейшую особенность системы зачетных единиц (СЗЕ) как формы организации учебного процесса: в СЗЕ может быть допустима любая образовательная технология, при условии что она обеспечивает достижение предусмотренных программой образовательных целей, требуемую полноту и уровень освоения учебного материала. Таким образом, при переходе к системе зачетных единиц соответствие государственным образовательным стандартам должно устанавливаться не только по признаку соблюдения МГТУ им. Н.Э. Баумана нормативных сроков освоения образовательной программы, но в большей мере по показателям оценки результатов образовательного процесса, по формированию предусмотренных стандартом компетенций будущего специалиста, его знаний умений и навыков. Поэтому переход от традиционной организации учебного процесса к системе зачетных единиц требует разработки адекватных новым задачам оценочных средств и технологий.

Список литературы

1. Бадарч Д., Наранццег Я. Методические рекомендации по внедрению кредит-системы и асинхронной организации учебного процесса / Под ред. Б.А. Сазонова. – Улан-Батор: МГУНТ, 2002.

ВОПРОСЫ ОРГАНИЗАЦИИ КРЕДИТНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОГРАММАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Е.А. Воробьева, В.Г. Богомолов
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Система кредита - систематический способ описания образовательной программы путем присвоения кредитов к ее компонентам. Определение кредитов применительно к системам высшего образования в программах математических дисциплин может базироваться на различных параметрах, таких как трудоемкость студенческой работы, результаты обучения и время контакта с преподавателями. Европейская система передачи и накопления кредитов (ECTS) сосредоточена на студенте и основана на трудоемкости студенческой работы, требуемой для достижения целей программы математических дисциплин, которые целенаправленно указаны в терминах

полученных результатов обучения, знаний и умений (навыков), которые должны быть приобретены.

Необходимо отметить, что ECTS была введена в 1989 году в рамках программы Erasmus, которая в настоящее время стала частью программы Socrates. ECTS явилась единственной системой кредитов, которая была успешно проверена и использована во всей Европе. Первоначально ECTS была предназначена для передачи кредитов. Система облегчила признание периодов обучения за границей и таким образом увеличила качество и размеры студенческой мобильности в Европе. В последнее время ECTS развивается в систему накопления, которая будет реализована по нашему мнению в программах математических дисциплин на региональном, национальном и европейском уровнях. Это - одна из ключевых целей Болонской Декларации июня 1999.

ECTS делает программы обучения математических дисциплин легкой для прочтения и сравнения для всех студентов, национальных и иностранных. ECTS облегчает мобильность и академическое признание. ECTS помогает университетам организовывать и пересматривать их программы обучения. ECTS можно использовать в разнообразных программах математических дисциплин и способах предоставления образовательных услуг. ECTS делает высшее образование в МГТУ им. Н.Э. Баумана более привлекательным для студентов из других континентов.

ECTS базируется на соглашении, что 60 кредитами измеряют трудоемкость (рабочую нагрузку) студента дневной (очной) формы обучения в течение одного академического года. Студенческая рабочая нагрузка по программе дневного обучения в Европе насчитывает в большинстве случаев 36 - 40 недель в год, в этом случае один кредит составляет 25 – 30 рабочих часов. Рабочая нагрузка относится к отвлеченному времени, за которое средний учащийся может освоить требуемые объемы обучения.

Кредит - также способ определения количественных результатов обучения. Результатами обучения является набор компетенций, означающих что студент будет знать, понимать или способен сделать после завершения процесса обучения, короткого или длительного. Кредиты в ECTS могут быть получены только после завершения требуемой работы и соответствующей оценки достигнутых результатов обучения. Распределение кредитов ECTS основано на официальной продолжительности цикла программы обучения. Общая трудоемкость обучения для получения степени бакалавра, которая длится официально три или четыре года, составляет 180 или 240 кредитов соответственно.

Студенческая рабочая нагрузка в терминах ECTS включает время, затраченное на посещение лекций, семинаров, самостоятельную подготовку, подготовку к занятиям, сдачу зачетов и экзаменов, и т.д..

Кредиты проставлены по всем образовательным компонентам программы математических дисциплин (таким как модули, дисциплины и курсы, работа

над выпускной диссертацией, и т.д.) и отражают количество работы по каждому компоненту, требуемой по отношению к полному количеству работы, необходимой для завершения полного года обучения по рассматриваемой программе математических дисциплин.

Выполнение студентом программы подтверждается (местными) оценками, что является хорошей практикой. Уровень ECTS-оценок студентов основан на статистическом подходе. Следовательно, статистические данные относительно выполнения студентом программы обучения являются предпосылкой для применения системы ECTS- оценок. Так, например, оценки, предоставляемые студентам отметкой «пройдено», следующие: А отлично 10 %; В следующие 25 %; С следующие 30 %; D следующие 25 %; E следующие 10 %.

Различие сделано между оценками FX и F, которые используются для студентов – не сдавших курс. FX означает: "неудача" - требуется еще некоторая работа для того, чтобы "пройти" и оценка F: "неудача – требуется значительная дальнейшая работа". Включение оценок "неудачно" в документ "Transcript of Records" является дополнительным элементом.

Для математических дисциплин предполагается периодическое издание каталога курсов вуза, который должен быть опубликован на двух языках (или только на английском языке для программ, преподаваемых на английском) в сети на веб-сайте и/или в бумажном варианте. Каталог курсов должен содержать пункты контрольного списка, прилагаемого к этому документу, включая информацию для приехавших студентов из-за границы. Договор на обучение, содержащий список курсов, которые будут прочитаны и согласованы со студентом и ответственным академическим органом вуза. Расшифровка оценок документирует выполнение студентом программы математических дисциплин, в нем приведен список курсов, полученных кредитов, так же как местные оценки и по - возможности ECTS оценки. В случае передачи кредитов, этот документ должна быть изготовлен вузом, откуда студент отбывает непосредственно перед отъездом, и МГТУ им. Н.Э. Баумана, куда студент прибывает в конце его периода обучения.

Необходимо отметить, что марка ECTS будет предоставляться вузам, которые применяют ECTS надлежащим способом для образовательных программ всего первого и второго циклов. Марка поднимет уровень вуза как прозрачного и надежного партнера в европейском и международном сотрудничестве. Критерием для получения является наличие каталога курсов (интернет или бумажная версии) на двух языках (или только на английском для программ, преподающихся на английском языке), использование кредитов ECTS, образцы договоров на обучение, системы оценивания знаний и доказательства академического признания. Анкета должна быть выставлена на веб-сайт. Представление анкет не позже 1 ноября (ежегодно). Марка сохраняется в течение 3-х академических лет начиная с учебного года. Если

МГТУ им. Н.Э. Баумана будет обладать маркой, то информация о университете будет опубликована на веб-сайте Europa.

Приложение к диплому (академическая справка) – это документ, прилагающийся к диплому о высшем образовании, который стандартизует описание характера, уровня, содержания, контекста и статуса обучения, что привело к успешному завершению программы выпускником. Приложение к диплому обеспечивает прозрачность и облегчает академическое и профессиональное признание квалификаций (дипломы, степени, удостоверения и т.д.). Марка Приложение к диплому будет присваиваться вузам, которые выдают Приложение к Диплому всем выпускникам всех первых и вторых уровней обучения, в соответствии с структурой и рекомендациями, которые можно найти на веб-сайте <http://europa.eu.int/comm/education/socrates/ects.html>. Большая информации по ECTS и Приложению к диплому можно найти на веб-сайте Европейской Комиссии, включая список консультантов по ECTS/DS и несколько рекомендаций как подготовить хороший каталог курсов.

ECTS (**European Credit Transfer System**) первоначально была разработана по программе Erasmus (1988-1995) и прошла испытательный срок в течение 6 лет по пилотной схеме, в которой участвовали 145 вузов во всех странах Совета Европы, охватывая 5 образовательных областей: MBA, химия, история, техническая механика, математика и медицина. Следующим шагом, осенью 1995 года Европейская комиссия предложила расширить круг дисциплин и вовлечь в систему неуниверситетский сектор высшего образования. В результате этого в 1996-97 гг. 38 новых университетов с 348 факультетами и 36 не университетов с 206 факультетами использовали ECTS.

На основе результатов пилотной схемы система ECTS доказала себя эффективным инструментом для создания прозрачных учебных планов в том числе и по математическим дисциплинам и способствовала академическому признанию, и как следствие ECTS была включена в виде отдельного компонента высшего образования - Erasmus – программа Socrates (1995-1999). В 1997-98 гг. в 772 вузах введена система ECTS. В 1998-99 гг. еще 290 вузов попросили гранты для введения системы ECTS.

ECTS включает 3 основных элемента: информацию (об учебных программах и результатах учебы студентов); взаимное соглашение (между вузом и студентом);

Использование системы кредитов ECTS.

Эти 3 ключевых элемента функционируют с помощью 3-х основных документов: информационный пакет, заявление / соглашение на обучение и расшифровка записей (официальные документы). Эти документы качества, которые должны быть определены самим вузом с целью создания удовлетворительной основы для заключения двух- и многосторонних соглашений по сотрудничеству. Полное академическое признание означает, что время обучения за границей (включая экзамены и др. формы оценки) заменяется

сравнимым временем обучения в родном университете (включая экзамены и др. формы оценки), хотя содержание учебной программы может отличаться.

ECTS обеспечивает: ECTS кредит представляет собой численные значения (от 1 до 60) соответствующее единицам курса для характеристики нагрузки студента, необходимой для его завершения. Они отражают количество работы над каждой единицей курса, необходимой относительно к общему количеству работы для завершения полного годового академического обучения. ECTS кредиты более относительны, чем абсолютная значения нагрузки студента.

Кредит-час – мера, основанная на времени обучения. Студент, успешно закончивший изучение предмета, например по математике, получает то количество кредит-часов, которое выделено по данному предмету. Он использует эти кредит-часы для последующего получения степени. Разница успехов студентов определяется оценкой, кредит-час указывает на структуру процесса обучения, но не указывает уровня знания студента [3]. Другими словами, кредит-час указывает лишь на время, затраченное на данный предмет, он не связан с понятием личности или трудности данного предмета. Некоторые предметы требуют много времени, но дают мало кредит-часов и наоборот. Несмотря на слабые стороны, “кредит-система” нашла широкое применение. Она используется прежде всего для определения требования к обучению на степень, оптимального определения межпредметного соотношения. Она соответствует расписаниям студентов, а также способствует регулированию студенческой нагрузки, предоставляя возможность работать. В системе высшего образования кредит-час применяется в разных формах, он служит основой для составления сметы финансирования, предоставляемого государством. Нагрузки кафедр, преподавателей и студентов определяются кредит-часом, основываясь на котором, решается вопрос о переходе студента на следующий курс. Оплата за обучение производится также на основе кредит-часов. Имеется противоречие в предоставлении кредит-часа. Но, в любом случае, кредит-час играет важную роль в планировании сметы и расхода. Кредит-час – это мера, основанная на времени обучения. Большею частью один кредит-час – это число еженедельных 5-минутных уроков в течение одного семестра (15-16 недель), т.е. это означает совокупность 1 ч лекции в неделю, 2 ч практического занятия, 3 ч лабораторных работ плюс подготовка к ним, экзамен прием/сдача зачетов, домашние задания, курсовая работа. Студент, набравший указанное число кредит-часов, может получить определенную степень. Кредит-час и степень взаимосвязаны. В США для получения степени бакалавра требуется в среднем 123 кредит-часа, мастера от 30 до 35 кредит-часов.

«Кредит-система» регулирует многостороннюю деятельность университета: программу обучения, учебный план, расписание уроков, оценку знаний студентов, присуждение степеней, определение нагрузок преподавателей, определение оплаты за учебу и т.д. Эта система дает

возможность реально оценить деятельность преподавателя и студента, обеспечивает свободу обучения, что соответствует рыночным экономическим отношениям.

Например, объем учебной работы, выбранный студентом или установленный в соответствии с расписанием, определяется кредит-часом. Кредит-час – это 3 ч аудиторных и внеаудиторных занятий в течение одной недели одного семестра. Один кредит-час – это лекционное занятие, рассчитанное на 50 мин., плюс подготовка к нему, которая занимает в среднем 2 ч. 1 кредит-час лабораторной работы в неделю – это 2 ч. аудиторной и 1 ч. внеаудиторной работ.

Классификация студентов, обучающихся на бакалавра:

На основе собранных кредитов приемная комиссия делит студентов на новый, второй курс, средний курс, старший курс:

0-31 кредита новый студент;

32-63 кредита студент второго курса;

64-95 кредитов студент среднего курса;

больше 96 кредитов студент старшего курса.

Студент дневного отделения выбирает предметы на 12 кредитов, в летний семестр на 6 кредитов.

Некоторые вузы США кредиты даются на основе семестро-часов. В соответствии с положением называемым политикой Сената 42-33, не менее 40 часов планируемой работы на факультете требуется среднему студенту для получения одного кредита, хотя распределение времени различается от курса к курсу в среднем 1/3 времени, отводимая на аудиторные занятия (такие как лекции, лабораторные работы, семинары и т.д.) и 2/3 времени на самостоятельную подготовку. Кредиты, работы в аудитории и практикум или лабораторные работы, отражаются тремя числами, которые следуют за названием курса – например (3:3:0) : первое число показывает максимум кредитов для данного курса; второе число показывает время аудиторной работы (включая лекции, дискуссии, демонстрации и т.д.); третье число показывает время отводимое на практическую работу (включая лаборатории, студии, проектные комнаты и т.д.). Один академический час составляет 50 минут.

Список литературы

1. Юцявичене П.А. Теоретические основы модульного обучения: Дис. ... д-ра пед. наук. - Вильнюс, 1990.

2. Бадарч Д. Высшее образование США / Под ред. А.Я.Савельева. – М.: НИИВО, 2001.

3. Олейникова О.Н., Муравьева А.А. Системы квалификаций в странах европейского союза. – М.: Национальная Обсерватория профессионального образования Российской Федерации. – 2004. – 63 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПЕРЕХОДУ НА ЗАЧЁТНЫЕ ЕДИНИЦЫ В ГОСУДАРСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТАХ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

А.Ю. Аникин, Н.Т. Вилисова, В.А. Ефрюшкина
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Одной из важнейших задач, которую необходимо решить российской высшей школе в рамках согласованной программы действий стран-участниц Болонского процесса по созданию Европейского пространства высшего образования (ЕПВО), является переход к выражению трудоемкости обучения не в часах, а в зачетных единицах [1,2].

Зачетные единицы характеризуют трудоемкость образовательной программы с учетом всех её составляющих, в том числе аудиторной и самостоятельной работы студентов, различного вида практик, промежуточных и итоговой аттестаций и др. В зарубежных образовательных системах эквивалентом российского термина «зачетная единица» является термин «кредит».

ECTS основана на принципе, что 60 кредитов соответствуют учебной нагрузке (объему учебной работы), студента дневной формы обучения в течение одного учебного года. Объем учебной работы студента в ECTS – «это реальное время, необходимое для выполнения всех запланированных видов учебной деятельности, а именно: посещение лекций, семинаров, лабораторных занятий, а также самостоятельная работа; подготовка проектов, диссертации, сдача экзаменов и т.п.»

Объем учебной работы студентов по годовым образовательным программам во многих европейских странах варьируется в диапазоне 1500-1800 часов в год, что соответствует размерности кредита (зачетной единицы) примерно в 25-30 часов.

На практике трудоемкость конкретных образовательных программ подготовки может варьироваться в зависимости от особенностей учебного графика в конкретном вузе, типа программы (уровень, срок обучения), профиля подготовки, специальности и выбранной студентом специализации. Поэтому предварительно согласованные в рамках европейского проекта TUNING принципы взаимного доверия и эквивалентности, допускают возможные отклонения от усредненных показателей учебной нагрузки и продолжительности обучения [3]:

- продолжительность учебного года – 34-40 недель;
- один кредит – 25-30 часов учебной нагрузки;
- недельная учебная нагрузка – 40-42 часа.

В табл. 1 приведены базовые соотношения, определяющие усредненные эквиваленты показателей трудоёмкости образовательных программ, выраженные в часах и зачетных единицах, применительно к ГОС-2 (в ГОС-2 норматив еженедельной учебной нагрузки установлен в 54 акад. часа).

Таблица 1

Усредненная трудоемкость одной учебной недели
1 учебный год -----40 недель----- 60 зач. ед. 1 неделя -----1,5 зач. ед.

Часовые эквиваленты зачетной единицы в ГОС-2
1 неделя -----1,5 зач. ед.-----54 ак. часов 1 зач. ед. ----- 36 ак. часов (36 ак. часов * 45мин) : 60 мин. = 27 (астр. часов) 1 зач. ед. ----- 27 астр. часов

Установление нижнего предела значения часовых эквивалентов зачетной единицы в ГОС-3 в 33 ак. часа является первым шагом к снижению установленного в ГОС-2, явно завышенного норматива недельной студенческой нагрузки в 54 ак. часа (по 9 ак. часов в день 6 дней в неделю).

Значение этого норматива давно вызывает недоумение у наших зарубежных коллег. Противники предложения снизить и сделать более реалистичных рассматриваемый норматив аргументируют свою позицию тем, что 54 ак. часа соответствуют 40,5 астрономическим часам, что даже меньше, чем установленное трудовым законодательством ограничение длительности рабочей недели в 41 час.

При задании нормативов недельного объема учебной работы студентов вузов в ГОС-3 можно вообще отказаться от практики использования самого понятия «академический час», тем более, что длительность его для аудиторных занятий в российских вузах и сейчас варьируется (от 40 до 50 минут). Измерение же в академических часах внеаудиторной части студенческой нагрузки в большинстве случаев вообще не имеет смысла и практикуется лишь иногда в военных, художественных и некоторых других образовательных учреждениях, где и самостоятельная работа может выполняться в предусмотренные расписанием учебные академические часы под руководством преподавателей.

Задание в ГОС-3 нормативов студенческой нагрузки не в академических, а в рабочих часах в большей мере будет соответствовать складывающейся европейской практике.

Легко показать, что в качестве эквивалента действующего в настоящее время норматива в 54 ак. часа может быть принято значение недельной

учебной нагрузки студента в 45 рабочих часов. Соответствующие расчеты приведены в табл. 2. и учитывают рекомендуемое в ГОС-2 усредненное распределение часов недельной нагрузки студентов между аудиторными занятиями и самостоятельной работой (50 : 50).

Таблица 2

1 неделя-----54 ак. часа 54 ак. часа = 27 ак. часа ауд. зан. + 27 ак. часа . сам. раб.
Еженедельная нагрузка в астрономических часах: без учета перерывов между занятиями $(45 \times 27) : 60 + (45 \times 27) : 60 = 20,25 + 20,25 = 40,5 \text{ (час.)}$ с учетом перерывов между аудиторными занятиями из расчета: 45 мин. ауд. зан. + 10 мин. перерыв $(55 \times 27) : 60 + (45 \times 27) : 60 = 24,75 + 20,25 = 45 \text{ (час.)}$ Таким образом: 54 ак. часа = 45 часам реальной учебной нагрузки студентов
Часовой эквивалент зачетной единицы в ГОС-3 (проект)
1 неделя -----1,5 зач. ед.-----45 часов 1 зач. ед. ----- 30 часов

Таким образом, для ГОС-3 могут быть установлены следующие связанные между собой нормативные показатели трудоемкости образовательных программ: зачетная единица определяется как соответствующая 30 часам учебной работы студента при минимальной нормативной длительности учебного года - в 40 недель; максимальный еженедельный объем учебной работы студента - 45 часов при общей годовой трудоемкости изучаемых в течение учебного года дисциплин в 60 зачетных единиц.

В ГОС-3 целесообразно отказаться от регламентации распределения фонда учебного времени между аудиторными часами и часами самостоятельной работы студентов. Это позволит вузам более эффективно использовать учебное время с учетом специфики и направленности образовательных программ и отдельных дисциплин, используемых

образовательных технологий. В необходимых случаях, как это делается и сейчас, в соответствующих нормативных документах могут устанавливаться требования к минимальному количеству контактных часов совместной работы студентов и преподавателей для различных форм обучения и типов образовательных программ.

В ГОС-3 можно установить аналогичный показатель, приняв его равным, например 10%. Тогда при формировании часовых графиков реализации образовательных программ вузов заданные стандартами показатели нормативной трудоемкости могут переводиться из зачетных единиц в часы с учетом возможности отклонения от заданных выше средних нормативных значений в пределах 10%. Это позволяет задать рамочный норматив для часовых эквивалентов зачетной единицы в ГОС-3, аналогичный европейским:

1 зачетная единица = 25 – 30 часам учебной нагрузки студента.

Принятие рамочного норматива сделает стандарты нового поколения гибкими и более удобными для вузов, значимо упростит процедуры контроля соответствия показателей трудоемкости вузовских образовательных программ государственным образовательным стандартам.

Одна зачетная единица в ГОС-2 соответствует 36 академическим часам общей трудоемкости продолжительностью по 45 минут (см. табл.1).

Максимальный объем учебной нагрузки студента в неделю составляет 54 академических часа, или 1,5 зачетные единицы.

Расчет трудоемкости дисциплины в зачетных единицах производится исходя из деления ее трудоемкости в академических часах на 36 с округлением до 0,5 по установленным правилам. Зачет по дисциплине и трудоемкость курсовых проектов (работ) входят в общую трудоемкость дисциплины в зачетных единицах.

Одна неделя практики выражается 1,5 зачетными единицами.

Один семестровый экзамен выражается 1 зачетной единицей (3 дня подготовки и 1 день на экзамен).

Трудоемкость итоговой аттестации рассчитывается исходя из количества отведенных на нее недель: 1 неделя соответствует 1,5 зачетным единицам.

В табл. 3 приведен пример расчета, выполненного по данной методике. В качестве исходного для выполнения расчетов использован фрагмент примерного учебного плана, приведенный в табл. 4.

**Пример расчета, выполненного по методике, рекомендованной
Минобразованием России.**

п/п	Наименование дисциплин (в том числе практик)	Трудо- емкость по ГОС-2 (а.ч.)	Распре- деление экзамен- ов	Трудо- емкость в (зач. ед.)	Расчеты по методике Минобразования России (письмо Минобразования России от 28.11.2002 №14-52-988 нн\13)
1	2	3	4	5	6
1.	Гуманитарные и социально- экономические дисциплины	1800	8 экз.	58	$(1800 : 36) + (8) = 58$ (зач.ед.)
2.	Общие математические и естественнонаучные дисци- плины	2000	8 экз.	63	$(2000 : 36) + (8) = 63,6$ (зач.ед.)
	<i>Федеральный компонент:</i>	1610	6 экз.	50	$(1610 : 36) + (6) = 50,7$ (зач.ед.)
2.1	Математика	600	2 экз.	18	$(600 : 36) + (2) = 18,7$ (зач.ед.)
2.2	Информатика	200	1 экз.	7	$(200 : 36) + (1) = 6,6$ (зач.ед.)
2.3	Физика	460	2 экз.	14	$(460 : 36) + (2) = 14,8$ (зач.ед.)
2.4	Химия	250	1 экз.	7	$(250 : 36) + (1) = 7,9$ (зач.ед.)
2.5	Экология	100		3	$(100 : 36) = 2,8$ (зач.ед.)
2.7	<i>Национально-региональный (вузовский) компонент</i>	200	1 экз.	7	$(200 : 36) + (1) = 6,6$ (зач.ед.)
2.8	Дисциплины по выбору сту- дента, устанавливаемые вузом	190	1 экз.	7	$(190 : 36) + (1) = 6,3$ (зач.ед.)
3.	Общепрофессиональные дисциплины	2686	11 экз.	85	$(2686 : 36) + (11) = 85,6$ (зач.ед.)
4.	Специальные дисциплины	308	3 экз.	11	$(308 : 36) + (3) = 11,6$ (зач.ед.)
5.	Факультативные дисц-ны	450		12	$(450 : 36) = 12,5$ (зач.ед.)
6.	Практика	6 нед.		9	$6 * 1,5 = 9$ (зач.ед.)
6.1	Учебная	2 нед.			$2 * 1,5 = 3$ (зач.ед.)
6.2	Производственная	2 нед.			$2 * 1,5 = 3$ (зач.ед.)
6.3	Преддипломная	2 нед.			$2 * 1,5 = 3$ (зач.ед.)
	Итоговая аттестация	6 нед.		9	$6 * 1,5 = 9$ (зач.ед.)
	ИТОГО:		30	247	249,3 (зач.ед.)

Таблица 4

Фрагмент примерного учебного плана подготовки бакалавра техники и технологии (исходный учебный план)*

Нормативный срок обучения - 4 года

(173 уч. нед.: 136 нед. зан., 25 нед. экз.; 6 нед. практ.; 6 нед. итог. ат.)

п/п	Наименование дисциплин (в том числе практик)	Ч А С О В			П Р И М Е Р Н О Е распределение по семестрам								Рас- преде- ление экза- менов)
		Трудо- ем- кость по ГОС-2	Из них		1	2	3	4	5	6	7	8	
1.	Гуманитарные и социально-экономические дисциплины	1800											8 экз
2.	Общие математические и естественнонаучные дисциплины	2000											8 экз
	<i>Федеральный компонент:</i>	<i>1610</i>	<i>918</i>	<i>692</i>									
2.1	Математика	600	340	260	x	x	x	x					2 экз.
2.2	Информатика	200	136	64	x	x							1 экз.
2.3	Физика	460	255	205		x	x	x					2 экз.
2.4	Химия	250	136	114	x	x							1 экз.
2.5	Экология	100	51	49				x					.
2.7	<i>Национально-региональный (вузовский) компонент</i>	<i>200</i>											1 экз
2.8	<i>Дисциплины по выбору студента, устанавливаемые вузом</i>	<i>190</i>											1 экз
3.	Общепрофессиональные дисциплины	2686											11 экз
4.	Специальные дисциплины	308											3 экз
5.	Факультативные дисциплины	450											
6.	Практика	6 нед.											
6.1	Учебная	2 нед.								x			
6.2	Производственная	2 нед.									x		
6.3	Преддипломная	2 нед.										x	
	Итоговая аттестация	6 нед.											
	Экзамены	25 нед											30

Пояснения:

Поскольку сумма в столбце 6 превысила нормативное значение в 240 зачетных единиц, то для заполнения столбца 5 брались, как правило, целые меньшие значения.

Для строки 2.2, напротив, было взято большее значение (не 6, а 7), что позволит при разработке семестровых учебных планов разделить трудоемкость дисциплины между семестрами в соотношении 3 зач. ед. и 4 зач. ед. (4 зач. ед в семестре, котором предусматривается экзамен).

Полученные в результате расчетов (по методике Минобразования России или долевым методом) учебные планы в зачетных единицах не зависят от того, как были или будут определены их часовые эквиваленты и в этом смысле являются идентичными, как при действующих ГОС- 2, так и в будущем для ГОС-3 [3,4]. Заметим, что более для этого подходит план, рассчитанный долевым методом, так как он точно соответствует принципу ECTS, согласно которому «60 кредитов измеряют учебную нагрузку студента дневной формы обучения в течение одного учебного года».

Список литературы

1. *Бадарч Д., Наранццег Я., Сазонов Б.А.* Организация индивидуаль-но-ориентированного учебного процесса в системе зачетных единиц / Под общ. ред. Б.А.Сазонова. – М.: НИИВО, 2003.
2. Болонский процесс: поиск общности европейских систем высшего образования (Проект Tuning)/ Под научн. ред. д-ра пед. наук. проф. В.И.Байденко. – М.: ИЦПКПС, 2006.
3. *Байденко В.И.* Болонский процесс: проблемы, опыт, решения. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специали-стов, 2006. – 95 с.
4. *Сазонов Б.А.* Болонский процесс: актуальные вопросы модерниза-ции российского высшего образования./ Учебное пособие. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана - 2006. – 178 с.

ГЛУБИНА ПОНИМАНИЯ «СЛОВА» В ГРАФИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

М.Г. Новикова

Российская академия правосудия

Целью данной статьи является рассмотрение глубины понимания «слова» и возможности графического изображения вышеупомянутого процесса.

Слово можно определить как основную структурно-семантическую единицу языка, служащую для именования предметов и их свойств, явлений,

отношений действительности, обладающую совокупностью семантических, фонетических и грамматических признаков, специфичных для каждого языка [1].

Поскольку термин «понимание» тесно связан с такими понятиями, как смысл и значение, то за основу графической модели понимания «слова» можно взять хорошо известный лингвистам семантический треугольник (см. рис. 1). С его помощью изображают отношение между факторами, конституирующими слово как знак языка, т.е. отношение между референтом - объектом реальной действительности, значением и обозначающим, т.е. звуковым или графическим словом.



Рис.1

На наш взгляд, схема **понимания** слова должна отражать ряд ключевых моментов:

- наглядно иллюстрировать различный объем понимания,
- должна быть универсальной, т.е. подходящей для любого известного языка.

Для соблюдения вышеупомянутых условий, необходимо произвести над семантическим треугольником ряд преобразований (см. рис. 2). Основание треугольника АВ, где А – форма слова (звуковая или графическая), а В – объект реальной действительности, оставим неизменным. Вершину С необходимо заменить, поскольку «значение слова» - слишком широкое понятие, неподходящее для отображения процесса понимания. Поэтому «значение» слова заменяем на «характерные черты» референта, поскольку понимание возможно благодаря знанию отличительных черт, которые постоянны и неизменны в пределах одного языка и даже во всех языках мира.

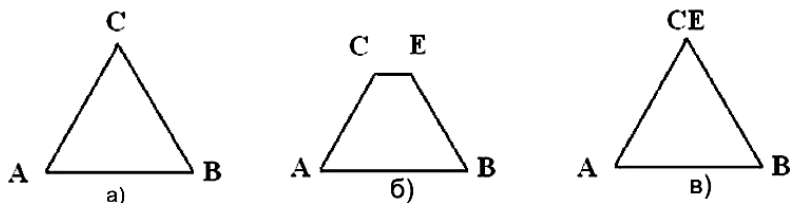


Рис. 2.

Являясь элементом языковой системы, слово подчиняется грамматическим законам, следовательно, обладает грамматическим значением,

которое необходимо отразить на схеме (см. рис. 2б). Поскольку грамматическое значение тесно связано с характерными чертами понятия и как бы упорядочивает их, целесообразно в рассматриваемую схему ввести точку Е – грамматическое значение, и расположить ее в непосредственной близости от точки С – характерные черты.

Таким образом, получается трапеция с вершинами АВЕС. Однако данная схема подходит для обозначения слов с одним лишь грамматическим значением типа: штеко, бокренок и т.д. В потоке связной речи такие слова встречаются достаточно редко, поэтому разводить точки С и Е на схеме не имеет смысла. Характерные черты слова и его грамматическое значение тесно переплетаются, дополняя и упорядочивая друг друга, поэтому их можно изобразить на схеме в виде одной точки СЕ (см. рис. 2в).

При составлении схемы необходимо учитывать и тот факт, что глубина понимания не является фиксированной величиной, а постоянно меняется. Процесс понимания неразрывно связан с личностью. Слова появляются не сами по себе, их порождает человек, преследуя ту или иную цель, т.е. он закладывает в слово необходимое ему значение. Становится очевидным, что один и тот же референт имеет постоянные характерные свойства, но разное закладываемое значение. Непонимание между людьми, владеющими одним и тем же языком, возникает из-за неулавливания закладываемого значения. Таким образом, на схеме понимания слова необходимо отобразить не только закладываемое значение, но и уровни понимания. Можно выделить три уровня понимания: полное, частичное и непонимание. Глубина понимания зависит от приближения закладываемого значения к характерным чертам понятия. Становится очевидным, что внутри треугольника АВ(СЕ) существуют три уровня, символизирующих три степени понимания и некая плавающая точка D – закладываемое значение. Графически это можно отобразить следующим образом: введем точки L1, L2, L3, L4, которые поделят треугольник АВ(СЕ) на три части (см. рис. 3). Треугольник L2L3(СЕ) символизирует зону полного понимания. Трапеция L1L4L3L2 обозначает зону частичного понимания. Трапеция ABL4L1 показывает зону непонимания.

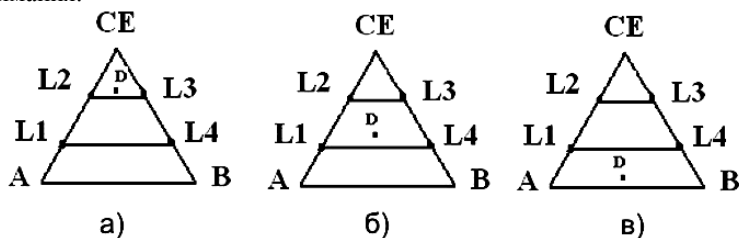


Рис.3

В зависимости от того, в какую геометрическую фигуру попадает точка D – закладываемое значение, и зависит степень понимания слова. Графически это выглядит следующим образом: если точка D лежит в треугольнике L2L3(CE), можно говорить о полном понимании слова (см. рис. 3а). Точка D будет стремиться к точке (CE), но никогда не совпадет с ней, поскольку у каждого человека свое уникальное понимание и восприятие. Поэтому степень понимания не зависит от удаления точки D от точки (CE) в треугольнике L2L3(CE). Данная удаленность – это дань своеобразию и неповторимости каждого человека.

Если точка D лежит в трапеции L1L4L3L2, то речь идет о частичном понимании слова (см. рис. 3б).

Если точка D лежит в трапеции ABL4L1, можно говорить о непонимании слова (см. рис. 3в).

На приведенных выше схемах точка D расположена перпендикулярно под точкой (CE). Однако, при изменении ее положения в пределах одной и той же геометрической фигуры, глубина понимания останется неизменной. И, несомненно, нельзя упускать тот факт, что для понимания слова нет необходимости предъявлять предмет действительности. Таким образом, можно сделать вывод, что референт (точка B) не влияет на положение точки D в треугольнике AB(CE). Следовательно, объект реальности (точка B) может присутствовать незримо и схема понимания сводится к отрезку A(CE) (см. рис. 4). Деление на зоны понимания сохраняется и обозначается точками L1 и L2. Закладываемое значение (точка D) может располагаться на отрезке AL1 при непонимании, L1L2 при частичном понимании, L2(CE) при полном понимании. На нижеприведенной схеме изображено частичное понимание (см. рис. 4а).

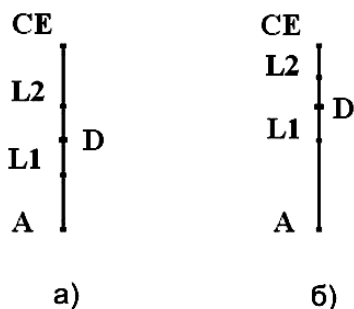


Рис. 4.

Наконец, осталось рассмотреть равномерность распределения точек L1 и L2 на отрезке A(CE). Предположим, что для частичного понимания необходимо осознание хотя бы 50% закладываемого значения и характерных черт референта; для полного понимания необходимо улавливание не менее 85%. В оставшиеся 15% предлагается заключить роль подсознания или интуиции и индивидуальные особенности человека при понимании слова. Если

длину отрезка $A(CE)$ принять за единицу, то точка $L1$ будет располагаться на 0,5 длины этого отрезка, а точка $L2$ на 0,85 его длины. Таким образом, окончательный вариант схемы частичного понимания будет выглядеть следующим образом (см. рис. 4б).

В отношении понимания слова остается неосвещенным последний вопрос. Как определить, в какую зону понимания того или иного слова поместить точку D ? Критериями определения зон являются собственные ощущения. Если не возникает никаких ассоциаций после прочтения или прослушивания слова, точка D располагается на отрезке $AL1$. При понимании слова, но желании получить дополнительную информацию для окончательного прояснения значения, точка D размещается на отрезке $L1L2$. при моментальном четком видении объекта реальности, точка D попадает на отрезок $L2(CE)$.

Опираясь на все вышесказанное, можно сделать следующие выводы:

1. сам процесс понимания отдельно взятого слова можно определить как совпадение закладываемого смысла с характерными чертами референта;
2. в процессе понимания можно выделить три уровня: полное понимание, частичное понимание и непонимание;
3. схематично процесс понимания можно изобразить в виде отрезка, разделенного на три части и плавающей точки на нем.

Список литературы

1. Языкознание. Большой энциклопедический словарь/ Гл. ред. Ярцева В.Н. – 2-е изд. – Я 41 М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. – 685с.

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТИРОВАНИЯ СТУДЕНТОВ

С.К. Соболев

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

При обработке результатов тестирования студентов первого курса по математике и другим предметам встала задача выявления, с одной стороны, насколько коррелированы оценки за тестирование по разным предметам между собой и, с другой стороны, как оценка за тестирование по определенному предмету соотносится с оценкой за ЕГЭ по этому же предмету. Кроме того, естественно построить модель линейной зависимости (т.е. регрессии) между двумя такими оценками. Известные формулы линейной регрессии не симметричны: можно построить линейную регрессию оценки по одному предмету на другую и наоборот, и прямые этих регрессий, как известно, не совпадают. На это обращено внимание, например, в [1].

Постановка задачи в двумерном случае. Пусть даны конечная выборка двумерных арифметических векторов: $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$, где x_i и y_i оценки за тест i -го студента по испытаниям X и Y соответственно. Требуется на плоскости найти прямую $\ell: y = kx + b$ такую, чтобы «уклонение» точек $M_1(x_1; y_1), \dots, M_n(x_n; y_n)$ до этой прямой было наименьшим. Решение задачи зависит от способа вычисления «уклонения» этих точек от прямой ℓ . Известно, что если рассматривать Y как функцию от X , т.е. если за меру уклонения взять сумму квадратов отклонений этих точек по вертикали (вдоль оси OY), то получится обычная линейная регрессия Y на X : $y = \bar{y} + \frac{r \cdot s_y}{s_x} (x - \bar{x})$, а если за меру уклонения взять сумму квадратов отклонений по горизонтали (т.е. вдоль оси OX), то получится прямая $y = \bar{y} + \frac{s_y}{r \cdot s_x} (x - \bar{x})$, где $\bar{x}, \bar{y}, s_x, s_y$ и r – выборочные средние, среднеквадратичные отклонения и коэффициент корреляции соответственно. Если же оценки X и Y рассматривать как равноправные, то и в качестве уклонения надо взять величину, в которой X и Y входили бы равноправно.

Задача № 1. Предположим сначала, что оценки за оба испытания выставлялись по **одинаковой** шкале (например, 20-балльной). Тогда за меру уклонения возьмём величину δ^2 , равную сумме квадратов расстояний от точек $M_1(x_1; y_1), \dots, M_n(x_n; y_n)$ до прямой ℓ .

Решение задачи №1. Искомая прямая имеет уравнение

$$y = \bar{y} + k(x - \bar{x}), \text{ где } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j - \text{выборочные средние этих}$$

оценок, а угловой коэффициент равен

$$k = \frac{\sqrt{(Q(x) - Q(y))^2 + 4K_{xy}^2} - Q_x + Q_y}{2K_{xy}},$$

$$\text{где } Q_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, Q_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \text{ и } K_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

$$\text{При этом } \min \delta^2 = \frac{1}{2} (Q_x + Q_y - \sqrt{(Q_x - Q_y)^2 + 4K_{xy}^2}).$$

Заметим, что выборочные среднеквадратичные отклонения двух оценок и коэффициент корреляции между ними равны соответственно:

$$s_x = \sqrt{\frac{Q_x}{n}}, s_y = \sqrt{\frac{Q_y}{n}}, r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}}.$$

Рассмотрим двумерное нормальное распределение с параметрами $a = \bar{x}$, $b = \bar{y}$, $\sigma_x = s_x$, $\sigma_y = s_y$ и $r = r_{xy}$. Его эллипс рассеивания задается

уравнением $\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-b}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-b}{\sigma_y}\right)^2 = C = \text{const}$. Тогда можно

показать, что прямая, наименее уклоняющаяся (в смысле обычного расстояния) от данных n точек, совпадает с главной осью эллипса рассеивания двумерного нормального распределения, параметры которого равны соответствующим выборочным значениям данной двумерной выборки.

Интересна интерпретация полученного результата на языке комплексных чисел. Для каждой точки $M_j(x_j; y_j)$ рассмотрим комплексное число $z_j = (x_j - \bar{x}) + (y_j - \bar{y})i$, где $i = \sqrt{-1}$. Тогда наименее уклоняющаяся прямая имеет угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arg \sum_{j=1}^n z_j^2\right) \text{ и } \min \delta^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 - \left| \sum_{j=1}^n z_j^2 \right| \right)$$

Задача № 2. Пусть теперь оценки по предметам X и Y выставлялись по разным шкалам (например, по 20-балльной и 100-балльной соответственно). Тогда меру уклонения точек $M_1(x_1; y_1), \dots, M_n(x_n; y_n)$ от прямой $\ell: y = kx + b$ нужно вычислять как-то иначе. Например, за такое уклонение можно взять сумму квадратов отклонений этих точек от прямой ℓ по вертикали и по горизонтали, деленных на соответствующие масштабирующие множители:

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\Delta x_i}{\mu_X} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\mu_Y} \right)^2 \right), \text{ где } \Delta x_i = \left| \frac{y_i - b}{k} - x_i \right|, \Delta y_i = |kx_i + b - y_i|.$$

Масштабирующие множители μ_x и μ_y можно взять равными максимальным значениям соответствующих оценок, т.е. $\mu_X = 20$ и $\mu_Y = 100$, или же равными соответствующим значениям выборочным среднеквадратичным отклонениям, т.е. $\mu_X = s_X$, $\mu_Y = s_Y$. Выберем последнюю трактовку. Поскольку искомая прямая при любой трактовке уклонения должна проходить через точку $M_0(\bar{x}; \bar{y})$, то соответствующее уклонение вычисляется по формуле

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{k(x_i - \bar{x}) + \bar{y} - y_i}{s_y} \right)^2 + \left(\frac{\frac{y_i - \bar{y}}{k} + \bar{x} - x_i}{s_x} \right)^2 \right)$$

Обозначим $\frac{ks_y}{s_x} = t$, тогда получим $\rho^2 = n \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) (t^2 - 2rt + 1) = F(t)$.

Функция $F(t)$ имеет локальные минимумы в точках $t = \pm 1$, причем, если $r > 0$, то глобальный минимум будет при $t = 1$, а если $r < 0$ (что практически никогда не бывает), то при $t = -1$ (см. Рис. 1).

Таким образом, наименее уклоняющаяся прямая в этом случае задается уравнением $y = \bar{y} + k(x - \bar{x})$, где $k = \frac{s_y}{s_x}$. Эта прямая является диагональю

прямоугольника, описанного вокруг эллипса рассеивания, со сторонами, параллельными координатным осям (см. Рис. 2).

Задача № 3. Пусть опять оценки по предметам X и Y выставались по разным шкалам. Сделаем замену переменных: $u = \frac{x - \bar{x}}{s_X}$, $v = \frac{y - \bar{y}}{s_Y}$. Поставим задачу: в координатной плоскости (u, v) найти прямую, проходящую через начало координат и такую, чтобы сумма квадратов расстояний от соответствующих точек $N_i(u_i; v_i)$ до этой прямой будет наименьшей.

Решение задачи №3: это прямая $v = u$. Таким образом, в плоскости (x, y) наименее уклоняющаяся прямая в этом случае будет та же, что и в задаче №2, а именно $y = \bar{y} + \frac{s_Y}{s_X}(x - \bar{x})$.

Постановка задачи в трехмерном случае. Пусть даны конечная выборка трехмерных арифметических векторов: $(x_1; y_1; z_1), \dots, (x_n; y_n; z_n)$, где x_i , y_i и z_i – оценки i -го студента по испытаниям X , Y и Z соответственно. Требуется найти плоскость $\pi: ax + by + cz = d$ такую, чтобы «уклонение» точек $M_1(x_1; y_1; z_1), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n)$ от этой плоскости было наименьшим. Решение задачи зависит от способа вычисления «уклонения» этих точек от плоскости π , но в любом случае эта плоскость будет проходить через точку $M_0(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$. Если рассматривать оценку Z как функцию оценок X и Y , т.е. если за меру «уклонения» взять сумму квадратов отклонений, параллельных оси OZ , то, как известно, получится такая плоскость (линейная регрессия Z на X и Y):

$$z - \bar{z} = k(x - \bar{x}) + m(y - \bar{y}), \text{ где } k = \frac{s_z(r_{xz} - r_{xy}r_{yz})}{s_x(1 - r_{xy}^2)}, m = \frac{s_z(r_{yz} - r_{xy}r_{xz})}{s_y(1 - r_{xy}^2)}.$$

Мы же будем искать уравнение **взаимной** линейной регрессии, т.е. такое, в котором X , Y и Z были бы равноправны.

Задача №4. Пусть оценки за испытания X , Y и Z выставались по единой шкале. Тогда за меру отклонения можно взять сумму квадратов расстояний от точек $M_1(x_1; y_1; z_1), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n)$ до плоскости π .

Решение задачи №4. Искомая плоскость проходит через точку $M_0(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ и имеет нормальный вектор, параллельный наименьшей оси эллипсоида рассеивания нормального распределения с параметрами, равными соответствующим выборочным значениям трехмерной выборки.

Задача №5. Пусть оценки за испытания X , Y и Z выставались по разным шкалам. Перейдем к новым переменным $u = \frac{x - \bar{x}}{s_X}$, $v = \frac{y - \bar{y}}{s_Y}$, $w = \frac{z - \bar{z}}{s_Z}$. Возьмем за меру уклонения сумму квадратов расстояний в пространстве (u, v, w) от соответствующих точек $N_i(u_i; v_i; w_i)$ до плоскости $Au + Bv + Cw = 0$.

Решение задачи №5. Искомая плоскость (в пространстве (x, y, z)) задается уравнением $\frac{A_0}{s_X}(x - \bar{x}) + \frac{B_0}{s_Y}(y - \bar{y}) + \frac{C_0}{s_Z}(z - \bar{z}) = 0$, где $\mathbf{n}(A_0; B_0; C_0)$ – собственный вектор отвечающей наименьшему собственному значению матрицы

$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix}$, а r_{xy} , r_{xz} и r_{yz} — соответствующие выборочные коэффициенты корреляции (все собственные значения этой матрицы положительны).

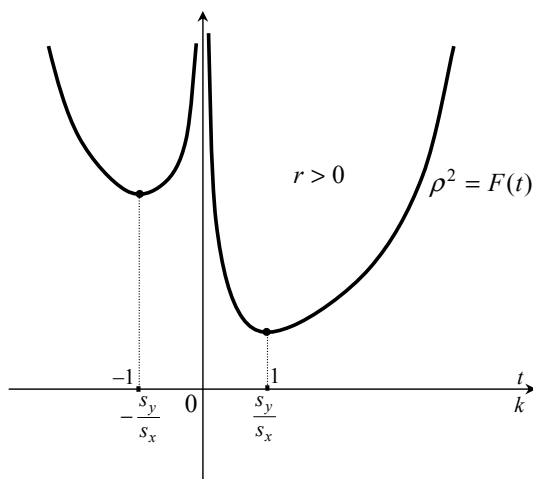


Рис. 1

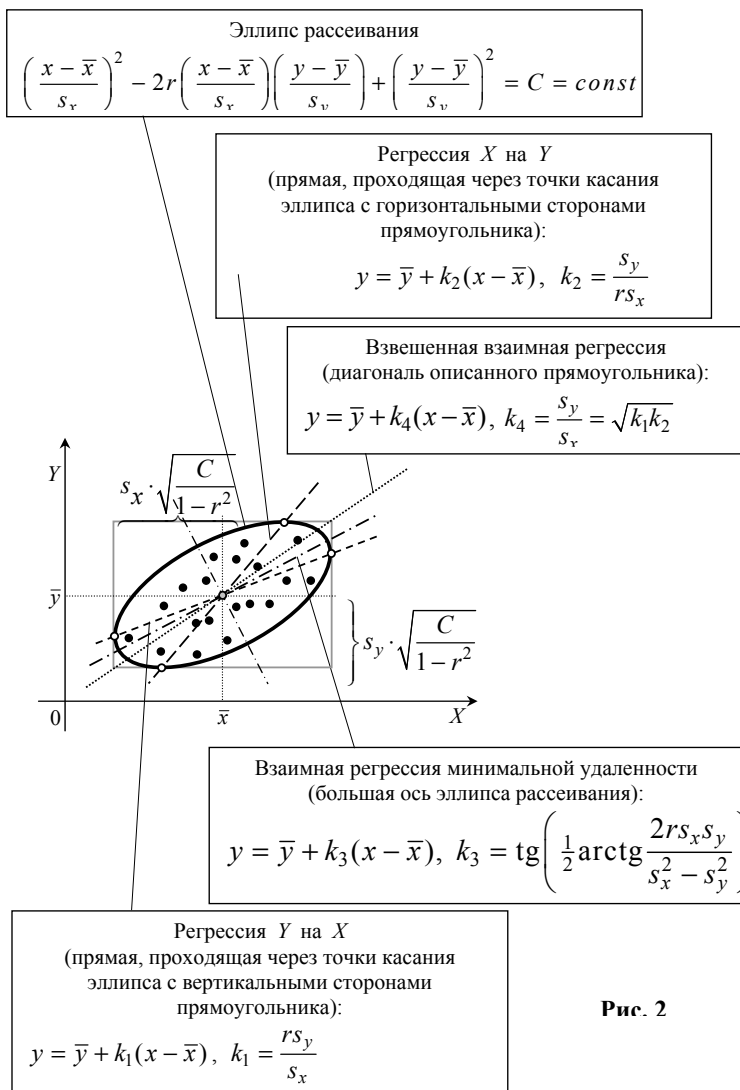


Рис. 2

Список литературы

1. А.А. Грешилов. Математические методы принятия решений. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2006. – 583 с.

О МЕТОДИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ПОСТРОЕНИЯ КУРСА «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

А.В. Филиновский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Курс читается студентам, обучающимся по специальности «прикладная математика», которые изучали такие разделы математики, как функциональный анализ и уравнения математической физики. Предполагается, что слушатели знакомы с основными свойствами интеграла Лебега и понятиями линейного функционального анализа. Цель курса – научить студентов постановке и решению задач для уравнений в частных производных средствами и методами функциональных пространств, а также познакомить их с некоторыми задачами спектрального анализа в математической физике.

Программа курса включает в себя 26 часов лекций и 26 часов семинарских занятий.

План лекций:

1. Пространство основных функций $D(Q)$. Срезающие функции, разложение единицы. Оператор осреднения, регуляризация суммируемых функций. Плотность гладких функций в классах суммируемых функций.
2. Пространство обобщенных функций $D'(Q)$. Обобщенные функции конечного и бесконечного порядков. Полнота пространства $D'(Q)$. Носитель обобщенной функции, теорема о склеивании.
3. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма Дю-буа Реймонда. Плотность множества регулярных обобщенных функций в пространстве $D'(Q)$.
4. Пространства решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Фундаментальные решения. Формула Пуассона для решений из $D'(Q)$. Теорема единственности. Гладкость решений.
5. Банаховы пространства функций с обобщенными производными. Гильбертовы пространства $H^k(Q)$. Доказательство полноты пространств $H^k(Q)$.
6. Перестановочность операторов осреднения и дифференцирования. Плотность множества $C^\infty(\overline{Q})$ в пространствах $H^k(Q)$. Пространства $H_0^k(Q)$.
7. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре.
8. След функций из пространства $H^1(Q)$ на гладкой поверхности. Свойства оператора следа.

9. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве $H^1(Q)$ в ограниченных областях. Существование и единственность обобщенного решения.

10. Обобщенные решения краевых задач для уравнений высших порядков в ограниченных областях.

11. Вариационный метод решения краевых задач в пространствах $H^k(Q)$ в ограниченных областях. Слабая полунепрерывность квадратичного функционала в пространствах $H^k(Q)$.

12. Краевые задачи в неограниченных областях. Оператор Шредингера в пространстве $L_2(R)$. Спектральные задачи для оператора Шредингера.

13. Дискретность спектра оператора Шредингера. Достаточные условия дискретности спектра, критерий Молчанова.

При проведении семинарских занятий их содержание в основном соответствует лекциям, при этом используются задачи из соответствующих разделов сборника задач [3] и учебных пособий [2], [4-6]. При изучении некоторых тем используются собственные методические разработки.

Список литературы

1. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М. Физматлит, 1979. – 320 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М. Физматлит, 2005. – 432 с.
3. *Владимиров В.С., Михайлов В.П., Ваширин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М. Физматлит, 2004. – 288 с.
4. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука, 1983. – 424 с.
5. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. Бином, 2005. – 262 с.
6. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шредингера. М. Изд-во МГУ, 1983. – 392 с.

Секция №1. Фундаментальные проблемы вероятностного прогнозирования и оценки криолитозоны при изменении климата.

А.В. Гласко, А.А. Федотов, П.В. Храпов. Динамика температурного поля вечномерзлых грунтов основания здания на свайном фундаменте.....	3
А.В. Гласко, А.А. Федотов, П.В. Храпов. Динамика температурного поля грунтов основания здания в условиях линзовой мерзлоты.....	7
Н.А. Россихин, И.Г. Зорина. О построении критериальных зависимостей теплообмена при плавлении плоского слоя материала.....	11
Б.В. Кавалеров. Математическое моделирование при испытаниях систем управления конвертированных газотурбинных установок для электроэнергетики.....	15
И.А. Комаров. Математическое моделирование температурных и массовых полей в засоленных мерзлых породах и криопэгах.....	19
И.А. Комаров, М.В. Мироненко. Моделирование водно-ионного состава засоленных мерзлых пород и криопэгов при изменении термобарических условий.....	23
Д.А. Крылов, П.В. Храпов, Н.И. Сидняев, А.А. Федотов. Расчет температурных полей в двухфазных грунтовых средах.....	29
Н.А. Лебедева. Развитие Лагранжевых методов для исследования течений дисперсных сред.....	35
С.А. Пославский, А.Ю. Кузнецов. Моделирование суффозионных процессов, сопровождающих фильтрационные движения жидкостей.....	39
Н.И. Сидняев. Математическая модель перколяционного механизма деформации двухфазного вещества.....	41
Н.И. Сидняев, И.Б. Бахолдин, Ю.С. Мельникова. Математическое моделирование распределения температурных полей в двухфазных грунтовых средах.....	46
Ю.С. Мельникова, Н.И. Сидняев, П.В. Храпов. Вариационная постановка задачи управления температурными полями в двухфазных средах.....	50
А.А. Федотов, В.Ю. Григорьев, П.В. Лонкин, П.В. Храпов. Прогнозирование температурных полей грунтов вокруг промышленных объектов в криолитозоне в условиях глобального потепления.....	53
Л.Н. Хрусталеv. Аналитический метод оценки надежности надземных трубопроводов на вечномерзлых грунтах.....	57
Г.Д. Чачанидзе. Математическое моделирование оценки рисков и ущербов при эксплуатации газо - нефтепроводов. Системный анализ, предсказание.....	61
Л.М. Юферева, Ю.А. Лавров. О температурном поле многослойного цилиндрического желоба.....	66

Секция №2. Вероятностно-статистические модели, методы расчета надежности и прочности сложных технических систем.

К.С. Андрейцева, Н.И. Сидняев. Вычисление нецентрального χ^2 распределения с помощью рядов.....	71
В.Н. Белов, Т.Н. Козлова, П.А. Проценко. Решение проблемы переменного режима в задачах химической кинетики.....	75
Д.Б. Белуха. О построении ортогональных планов второго порядка.....	87
А.А. Сиделёв, В.Н. Белов. Моделирование изменения прочности образцов при увеличении их размеров.....	96
М.А. Ермолаева. Непараметрическая оценка зависимости коэффициента пропорциональности в модели Кокса от фактора нагрузки.....	100
П.А. Лёвин. Оценка характеристик надежности технической системы в переменном режиме.....	105
А.В. Мاستихин. Стохастические дискретные модели эпидемий.....	111
И.В. Павлов. Оценка показателей надежности сложных систем с восстановлением по результатам испытаний их компонент.....	113
К.А. Репекто. Применение оценок Каплана-Мейера при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой.....	121
Г.С. Садыхов, О.В. Некрасова. Нижние и предельные оценки длительности безопасного срока эксплуатации техногенно-опасных объектов.....	125
Н.В. Степанова. Моделирование и оптимизация процессов торговли.....	128
В.И. Тимонин. Модификация метода Пэйнджера при расчете квантилей распределения совокупного убытка в рисковом страховании.....	131

Секция №3. Математическое моделирование сложных прикладных наукоемких задач.

И.Б. Бахолдин. Методы расчета вечномерзлых грунтов и программный комплекс merzlota.....	134
Ю.И. Дмитриенко, А.А. Захаров, А.С. Абакумов. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток для моделирования сверхзвуковых потоков вязкого теплопроводного газа в каналах.....	138
Ю.И. Дмитриенко, Ю.В. Беленовская, М.А. Воронцова, А.Ю. Дзагания. Динамических процессов взаимодействия ударников с упруго-пластическими преградами.....	143
Ю.И. Дмитриенко, М.Н. Коряков. Метод ленточно-адаптивных сеток на основе схем tvd для решения задач газовой динамики.....	147
Ю.И. Дмитриенко, И.К. Краснов, А.А. Николаев. Геометрически-обратные задачи теплового контроля и прогнозирование остаточного ресурса неметаллических конструкций.....	153
Ю.И. Дмитриенко, А.А. Захаров. Разработка программного обеспечения для численного моделирования в задачах газодинамики.....	158

Ю.И. Димитриенко, А.И. Левина. Моделирование локальных газодинамических процессов переноса в периодических пористых структурах.....	162
Ю.И. Димитриенко, В.В. Минин, А.И. Балакшин. Моделирование термонапряжений и терморазрушения композитных оболочек при лазерном нагреве.....	165
Ю.И. Димитриенко, Е.С. Ничеговский. Моделирование пьезоэлектровязкоупругих свойств композиционных материалов.....	172
Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов, А.Н. Дроголюб. Численное моделирование упруго-прочностных свойств композиционных материалов с многоуровневой структурой.....	178
Е.С. Попущина. Течение в каплеуловителе с учетом отклонения потока капель от оси конической воронки.....	183
Е.С. Чувашева, С.Н. Чувашев, И.Г. Зорина. Численное исследование термостойкости окошек летательного аппарата при нестационарном аэродинамическом нагреве.....	187
Е.С. Чувашева, Н.И.Якимов, С.Н.Чувашев. Математическое моделирование динамики полёта неуправляемой ракеты.....	190
Р. И. Шувалов. Математическое моделирование в задаче двумерной развертки фазы в космической радиолокационной топографической интерферометрии.....	194
В.Н. Тимофеев. Математическое моделирование дозвукового пространственного обтекания тел.....	198

СЕКЦИЯ №4. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения в практических приложениях.

П. Н. Антонюк. Преобразования Лоренца и рациональные функции.....	203
Я.А. Бутко, О.Г. Смолянов. Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений.....	206
Н. С. Васильев. Игровая модель маршрутизации глобальной пакетной сети.....	208
В.А. Камышников. Приближенный метод решения задачи о ранце большой размерности.....	211
Е.В. Коломейкина. О правильных разбиениях.....	214
Я.Ю. Коновалов, О.В. Кравченко. Алгоритм быстрого нахождения финитных решений функционально дифференциальных уравнений с линейно-преобразованным аргументом.....	218
Г.Г. Магарил-Ильев. Теория аппроксимации и задачи оптимального восстановления.....	222
К.Ю. Осипенко. Восстановление функций и их производных по неточно заданным коэффициентам Фурье.....	225
Н.А. Раутиан, В.В. Власов. Интегро-дифференциальные уравнения, возникающие в теплофизике, акустике и теории вязкоупругости, и их спектральный анализ.....	228

П.С. Саркисян. Квазиоднородные канонические системы	231
Э.Р. Смольяков. Экзотические траектории в гравитационных полях и в свободном пространстве.....	233
Э.Р. Смольяков. Теория поиска неизвестных законов природы и новых уравнений движения.....	238
В.М. Тихомиров. Принцип Лагранжа в теории необходимых условий экстремума.....	244
И.Г. Русяк, К.В. Кетова, Е.В. Трушкова, Р.Ю. Кривенков. Решение задачи маршрутизации в системе топливообеспечения региона.....	249
А.А. Шевляков. Оценка нулевой динамики неминимально-фазовых аффинных систем	252

Секция №5. Методы вычислительной и прикладной математики и их применение к фундаментальным исследованиям в различных областях энергетики и информационно-коммуникационных технологий.

А.В. Алексеев. Процедура выполнения численного расчета характеристик излучаемых мод планарных световодов, индуцированных внешним воздействием.....	257
Д.С. Барабошкин. Особенности расчета электрического поля в пролете воздушной линии электропередачи методом эквивалентных зарядов.....	261
Л.В. Гуров, А.С. Башкин. Модель расчета удельных энергетических характеристик непрерывного химического df-лазера с учетом интенсификации процессов смешения реагентов в активной среде.....	265
В.Э. Дрейзин, Е.П. Кочура, А.А. Гримов, А.В. Кочура. Проблемы построения нейтронного спектрометра с вычислительным определением интегральной плотности потока нейтронов.....	269
В.Э. Дрейзин, Е.П. Кочура, А.А. Гримов. Имитационное моделирование спектрометров нейтронного излучения.....	273
С.Г. Иванов, В.Н. Носов, В.И. Погонин, Е.А. Зевакин, А.С. Савин, А.М. Горелов, С.О. Леонов. Применение фотометра яркости для получения информации о наличии гидродинамических возмущений в морской среде....	277
В.Н. Носов, А.М. Горелов, С.Б. Каледин, В.А. Кузнецов, С.О. Леонов, А.С. Савин. Выделение возмущений морской поверхности при наличии априорной информации об их симметрии.....	281
И. А. Микляев. Матричная универсальная объектно-реляционная база данных с поддержкой древовидной структуры единицы информации.....	283
Д.А. Приказчиков, В.Я. Томашпольский. Асимптотическая модель для поверхностной волны на границе упругой и жидкой сред.....	287
Д.А. Приказчиков. Асимптотическая модель поверхностной волны в случае полупространства с тонким покрытием.....	289
Я.Л. Арцишевский, Т.Г. Климова, А.И. Расцепляев. Анализ систем координат для гипервекторных диаграмм непериодических электрических величин.....	292

Т.Г. Климова, А.И. Расщепляев. Применение вейвлет-преобразования для исследования переходных процессов в электроэнергетических системах.	296
В.В. Зуев, А.Г. Шмелева. Математические основы информационных технологий решения динамических задач.	300

Секция №6. Внедрение современных физических и математических методов в учебный процесс.

А.Ю. Аникин, В.Г. Крапоткин, Г.А. Кокотушкин. О путях совершенствования рейтинговой системы оценки успеваемости студентов по математическим дисциплинам.	305
Н.Т. Вилисова, Г.А. Кокотушкин. О некоторых приёмах определения зачётной единицы и её часовых эквивалентов.	310
Е.А. Воробьева, В.Г. Богомолов. Вопросы организации кредитной системы в программах математических дисциплин.	315
А.Ю. Аникин, Н.Т. Вилисова, В.А. Ефрюшкина. Методические рекомендации по переходу на зачётные единицы в государственных образовательных стандартах нового поколения.	321
М.Г. Новикова. Глубина понимания «слова» в графическом отображении.	327
С.К. Соболев. Некоторые математические аспекты анализа результатов тестирования студентов.	331
А.В. Филиновский. О методических аспектах построения курса «современные методы математической физики» для студентов специальности «прикладная математика».	337

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

**Актуальные направления развития прикладной
математики в энергетике, энергоэффективности
и информационно-коммуникационных технологиях**

Сборник трудов

Оформление Д. Белуха, Д. Крылов
Корректор П.В. Храпов

Подписано в печать 16.10.2010. Формат 60х90/16
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 27,75.
Тираж 350. Заказ 582

МГТУ имени Н.Э. Баумана
105005 г. Москва 2-я Бауманская ул. д. 5