Лекция 9. Электромагнитная индукция.

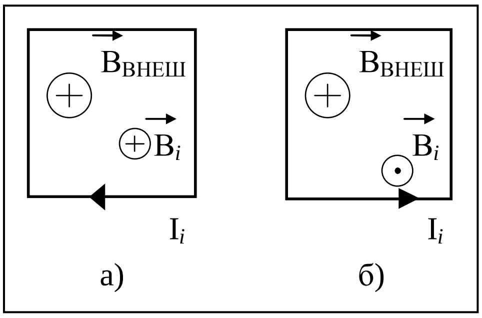
Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция. Взаимная индукция. Вихревые токи. Плотность энергии магнитного поля. Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

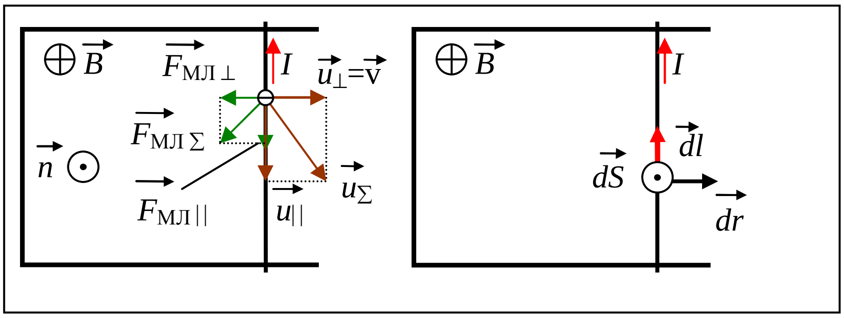
Опыт показывает, что если взять замкнутый проводник, то при *изменении* магнитного потока через площадку ограниченную проводником, в проводнике появляется индукционный ток – это явление называется *электромагнитной индукцией*. Индукционный ток появляется под действием сторонних сил со стороны *вихревого электрического* поля, возникающего при изменении магнитного потока. Величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\iint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right).$$

Знак минус принято писать для согласования с **правилом Ленца**: *индукционный ток направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение магнитного потока*. Закон электромагнитной индукции носит имя Фарадея (*Фарадей* (Faraday) *Майкл* (1791-1867), английский физик, один из основоположников учения об электромагнитном поле. Ленц, Эмилий Христианович (1804–1865), русский физик и электротехник.)



Пример на правило Ленца. Рассмотрим замкнутый проводящий контур, находящийся в магнитном поле с индукцией $B_{ВНЕШ}$, силовые линии которого перпендикулярны плоскости контура. Если величина магнитной индукции $B_{ВНЕШ}$ убывает с течением времени, то будет уменьшаться магнитный поток через площадку контура. Тогда в контуре должен появиться индукционный ток I_i, направленный так, чтобы создаваемое им магнитное поле с индукцией B_i препятствовало изменению магнитного потока, создаваемого внешним полем. В данном случае вектор $\vec{B}_i$ внутри контура должен быть направлен так же, как и вектор $\vec{B}_{ВНЕШ}$ (чтобы скомпенсировать уменьшение магнитного потока), поэтому индукционный ток направлен по часовой стрелке (рис. а). Если наоборот, индукция внешнего поля увеличивается, то индукционный ток должен стремиться уменьшить увеличение магнитного потока, поэтому вектор индукции $\vec{B}_i$ создаваемого им магнитного поля внутри контура направлен против $\vec{B}_{ВНЕШ}$, а сам ток направлен против часовой стрелки (рис. б).♣



Пример. Рассмотрим плоский прямоугольный проводящий контур, одна сторона которого может свободно перемещаться (перемычка скользит по двум направляющим проводникам). Контур находится в однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого направлен перпендикулярно плоскости контура. Пусть перемычка поступательно движется со скоростью v. Электроны внутри перемычки перемещаются вместе с перемычкой, их вектор скорости, перпендикулярный перемычке, равен скорости самой перемычки $\vec{u}_{\perp}=\vec{v}$. Вектор магнитной силы Лоренца, вызванный этой скоростью $\vec{u}_{\perp}$, будет направлен параллельно перемычке $\vec{F}_{МЛ\_||}=-e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$. Под действием этой силы электроны приобретут скорость упорядоченного движения вдоль перемычки $\vec{u}_{||}$. Поэтому положительное направление электрического тока будет направлено в обратную сторону. Направление нормали $\vec{n}$ к площадке контура выберем согласованным с положительным направлением тока.

(Вектору скорости $\vec{u}_{||}$ будет соответствовать сила $\vec{F}_{МЛ\perp}=-e\left(\vec{u}_{||}\times\vec{B}\right)$. Вектор суммарной скорости электронов будет направлен под некоторым углом к перемычке $\vec{u}_{\Sigma}=\vec{u}_{||}+\vec{u}_{\perp}$. Этой скорости будет соответствовать сила

$$\vec{F}_{ЛМ}=-e\left(\vec{u}_{\Sigma}\times\vec{B}\right)=-e\left(\left(\vec{u}_{\perp}+\vec{u}_{||}\right)\times\vec{B}\right)=-e\left(\vec{u}_{\perp}\times\vec{B}\right)-e\left(\vec{u}_{||}\times\vec{B}\right)=\vec{F}_{ЛМ\_||}+\vec{F}_{ЛМ\perp}.)$$

Сила $\vec{F}_{МЛ\_||}$ будет создавать в проводнике напряжённость поля сторонних сил $\vec{E}_{СТ}=\dfrac{\vec{F}_{МЛ\_||}}{q}=\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$. Вектор $\vec{E}_{СТ}$ направлен против движения электронов, т.е. по *положительному* направлению тока. Выберем направление касательного вектора к проводнику $d\vec{l}$ сонаправленным с вектором $\vec{E}_{СТ}$. Тогда ЭДС на малом участке проводника

$$\mathcal{E}_i=\left(\vec{E}_{СТ},d\vec{l}\right)=\left(\left(\vec{v}\times\vec{B}\right),d\vec{l}\right)=-\left(\left(\vec{v}\times d\vec{l}\right),\vec{B}\right)$$

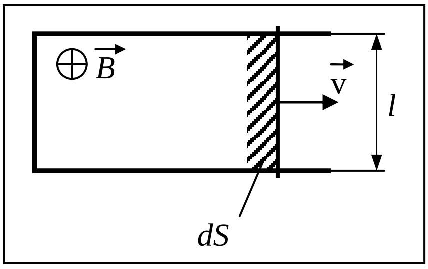
За малое время dt перемещение поступательно движущегося проводника будет равно $d\vec{r}=\vec{v}dt$. Поэтому можно записать

$$\mathcal{E}_i=-\left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times d\vec{l}\right),\vec{B}\right)=-\frac{\left(\left(d\vec{r}\times d\vec{l}\right),\vec{B}\right)}{dt}=-\frac{\left(d\vec{S},\vec{B}\right)}{dt}=-\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

В этом выражении знак минус указывает на то, что вектор $d\vec{S}=\left(d\vec{r}\times d\vec{l}\right)$ и вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ *всегда* будут направлены противоположно. Тогда для всего замкнутого контура

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E}_{CT},d\vec{l}\right)=-\frac{d}{dt}\iint_{S}\left(\vec{B},d\vec{S}\right).$$

Таким образом, знак минус в законе Фарадея указывает на положительное направление тока (т.е. вектора напряженности сторонней силы $\vec{E}_{CT}$). Если в контуре нет других элементов ЭДС, то знак минус можно опустить.



Тогда, можно считать, что за малый промежуток времени dt площадь контура изменится на $dS=lvdt$, поэтому магнитный поток изменится на $d\Phi=BdS=Blvdt$, откуда величина ЭДС индукции в контуре

$$\mathcal{E}_i=\frac{d\Phi}{dt}=Bvl\ .♣$$

Пример. Плоский контур, площадь которого *S*, вращается в постоянном магнитном поле индукции *B* с постоянной угловой скоростью ω. Ось вращения лежит в плоскости контура и перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Найти амплитудное значение ЭДС индукции, возникающей в контуре.

Решение. При вращении контура угол между нормалью к площади контура и вектором $\vec{B}$ меняется по закону: $\alpha=\omega\cdot t+\alpha_0$, ($\alpha_0$ – начальный угол, *t* - время). Тогда магнитный поток через площадь контура $\Phi=\mathrm{BS}\cos\left(\omega\cdot t+\alpha_0\right)$, следовательно, величина ЭДС

$$\mathcal{E}_i=-\Phi'(t)=\omega\mathrm{BS}\sin\left(\omega\cdot t+\alpha_0\right).$$

Поэтому максимальное (амплитудное) значение ЭДС $\mathcal{E}_{i\,max}=\omega\mathrm{BS}$. Таким образом, величина ЭДС индукции прямо пропорциональна угловой скорости вращения контура.♣

Замечание. Это пример показывает принцип генерации переменного тока.

Если площадь контура ограничена несколькими витками, то суммарная ЭДС равна сумме ЭДС в каждом витке контура $\mathcal{E}_{i\_\Sigma}=\sum_{k=1}^{N}\mathcal{E}_{i\_k}$, или

$$\frac{d\Phi_\Sigma}{dt}=\sum_{k=1}^{N}\frac{d\Phi_k}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\Phi_k\ .$$

Следовательно, суммарный поток равен сумме потоков $\Phi_\Sigma = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k$. Этот суммарный поток называется *потокосцеплением*.

Дифференциальная форма закона Фарадея.

Из интегральной формы закона электромагнитной индукции (закона Фарадея)

$$\oint_\Gamma \left(\vec{E}_{CT}, d\vec{l}\right) = -\frac{d}{dt}\iint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$$

с помощью теоремы Стокса $\oint_\Gamma \left(\vec{E}_{CT}, d\vec{l}\right) = \iint_S \left(rot\left(\vec{E}_{CT}\right), d\vec{S}\right)$ можно получить дифференциальную форму

$$rot\left(\vec{E}_{CT}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

При изменении во времени индукции магнитного поля в данной точке пространства, в окрестности этой точки появится поле сторонних сил, ротор векторов которого пропорционален скорости изменения вектора магнитной индукции.

Из этой формулы следует, что появляющееся поле является вихревым, т.е. силовые линии этого поля - замкнутые линии.

Если в области, где индукция магнитного поля зависит от времени, находится проводящая среда, то, по закону Ома, возникающее поле сторонних сил должно привести к возникновению электрического тока. Запишем закон Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \gamma \vec{E}_{CT}$. Отсюда следует, что силовые линии поля сторонних сил и линии тока совпадают. Но т.к. поле вихревое

$$rot\left(\vec{E}_{CT}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

то его силовые линии – замкнутые, поэтому и линии тока

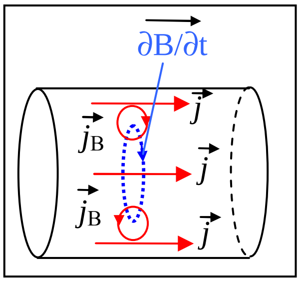
$$rot\left(\vec{j}\right) = rot\left(\gamma \vec{E}_{CT}\right) = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

будут замкнутыми. Т.е. векторное поле плотности тока, возникающее в проводнике при изменении внешнего магнитного поля, тоже вихревое. Такие токи получили название *вихревые токи* или *токи Фуко*. Знак минус в этом выражении указывает на правило Ленца – вектор плотности вихревого тока в окрестности данной точки направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение индукции внешнего магнитного поля.

Токи Фуко возникают, например, при движении проводников в неоднородном магнитном поле. При этом проводник начинает разогреваться (закон Джоуля-Ленца), на участки проводника с вихревыми токами действуют силы Ампера, тормозящие проводник. (Явление разогрева используют в индукционных печах, явление торможения – в демпферных устройствах, служащих для успокоения колебаний).

В тех устройствах, где появление токов Фуко следует предотвращать, применяют специальные приёмы – например в проводнике делают прорези, направление которых перпендикулярно возможному направлению вихревых токов. Или, вообще, электропроводящие части выполняют из набора тонких пластин (например, сердечники – магнитопроводы в трансформаторах).

Если по массивному проводнику протекает переменный электрический ток с плотностью $\vec{j}$, то внутри проводника он создаёт переменное магнитное поле, вектор изменения которого



$\overrightarrow{\partial B/\partial t}$, в свою очередь, приводит к появлению вихревых токов с плотностью $\vec{j}_B$, препятствующих изменению магнитного поля. Эти токи направлены так, что внутри проводника они ослабляют основной ток, а у поверхности, наоборот, усиливают. Таким образом, суммарная плотность тока у поверхности проводника усиливается, а внутри уменьшается. Такое явление называют *скин-эффект*. Следовательно, при скин-эффекте, если «выкинуть» внутренность проводника, то это не повлияет на его сопротивление переменному току. Поэтому, в устройствах, где протекает ток высокой частоты, проводники выполняют в форме полых трубок, при этом их внешнюю поверхность даже покрывают веществом с большой проводимостью (например, серебром).

Самоиндукция

Ток, протекающий по замкнутому проводнику, создаёт магнитное поле и, соответственно, магнитный поток через площадку, ограниченную проводником. Если форма проводника постоянная, то между силой тока в проводнике и магнитным потоком через площадку, ограниченную проводником, существует прямая зависимость $\Phi_B = L \cdot I$. Коэффициент пропорциональности L при отсутствии ферромагнетиков является постоянной величиной и называется *индуктивностью* контура или *коэффициентом самоиндукции* контура. Единица измерения индуктивности – Генри (Гн).

Пример. Найдем индуктивность длинного соленоида, внутри которого нет ферромагнетика (но, возможно, есть диамагнетик или парамагнетик). Будем предполагать, что длина соленоида значительно превосходит его диаметр, поэтому можно считать, что магнитное поле внутри соленоида является однородным. Пусть N – число витков, l – длина соленоида, R - радиус. Если сила тока, протекающего в соленоиде равна I, то величина индукции внутри равна

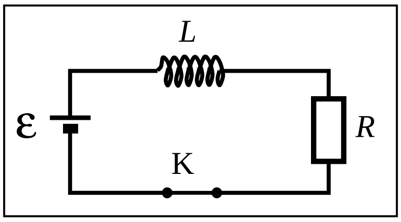
$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{l}.$$

Магнитный поток через поверхность, ограниченную одним витком $\Phi = BS = \mu\mu_0 I \dfrac{N}{l}\pi R^2$, потокосцепление во всем соленоиде $\Phi_\Sigma = N\Phi = \mu\mu_0 I \dfrac{N^2}{l}\pi R^2$. Индуктивность соленоида

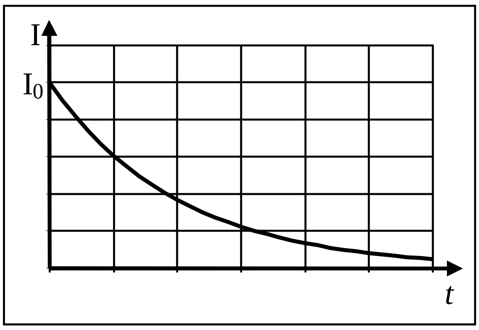
$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I} = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R^2 . \clubsuit$$

При изменении силы тока I в контуре будет изменяться и магнитный поток через площадку контура Ф, поэтому в контуре появится индукционный ток I_i, направление которого определяется правилом Ленца. Этот ток будет направлен так, чтобы скомпенсировать изменение магнитного потока, т.е. основного тока I. Это явление называется *самоиндукцией*. Согласно закону Фарадея $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, поэтому ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} .$$



Пример. В замкнутой цепи, содержащей катушку индуктивности (соленоид) с коэффициентом самоиндукции L, резистор сопротивлением R и источник с ЭДС $\mathcal{E}$ (внутреннее сопротивление источника r=0), протекает постоянный ток силой I_0. Найдём, как изменяется сила тока в цепи с течением времени после размыкания ключа К. Когда ключ замкнут, сила тока в цепи постоянная и равна $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$. ЭДС самоиндукции в катушке равна нулю. После размыкания ключа сила тока начнёт меняться, в катушке появиться ЭДС самоиндукции, поэтому по закону Ома $I = \dfrac{\mathcal{E}_{si}}{R} = -\dfrac{L}{R}\dfrac{dI}{dt}$. Откуда, $\dfrac{dI}{I} = -\dfrac{R}{L}dt$ и $I = Ce^{-\frac{R}{L}t}$ (C=const). С учётом начального условия - в момент размыкания ключа (т.е. при t=0) было $I = I_0$ - получаем



$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$. Т.е. ток в цепи не прекращается сразу, а убывает по экспоненциальному закону: $I \to 0$ при $t \to \infty$.

Так как цепь разорвана ключом К, то в месте разрыва начнут накапливаться разноимённые электрические заряды. Это приводит к тому, что напряженность электрического поля в этом месте нарастает и, например, в воздушной среде (практически сразу после разрыва цепи) между контактами ключа проскакивает электрическая искра (*электрический пробой воздуха*).

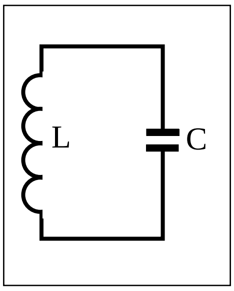
Предположим, что пробоя воздуха нет, поэтому вся запасенная в контуре энергия переходит в тепло. По закону Джоуля-Ленца мощность тепловыделения на сопротивлении *R* $P = I^2 R$. Тогда полное количество теплоты равно

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2R}{L}t} R dt = \frac{LI_0^2}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t} d\left(\frac{2R}{L}t\right) = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Т.о. *энергия магнитного поля*, создаваемая в катушке индуктивности *L* электрическим током силой *I*, определяется формулой

$$W_M = \frac{LI^2}{2}. ♣$$

Пример. Найдем период электрических колебаний в *идеальном колебательном контуре*, состоящем из катушки индуктивности *L* и конденсатора емкости С.



Сила тока в контуре равна скорости изменения заряда конденсатора

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}.$$

Напряжение на конденсаторе равно ЭДС самоиндукции на катушке $U = -L\frac{dI}{dt}$. В итоге из выражения $I = -CL\frac{d^2 I}{dt^2}$, получаем уравнение для силы тока в контуре

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{CL} I = 0.$$

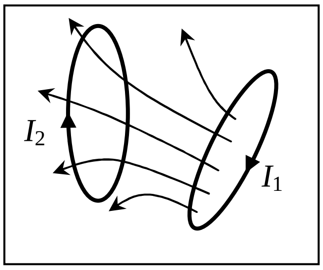
Это уравнение описывает свободные незатухающие колебания с циклической частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (формула *Томсона*). В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия в контуре сохраняется: $W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = const$.

(Сопротивление *R* в контуре отсутствует, поэтому нет тепловых потерь.)♣

Объёмная плотность энергии магнитного поля.

Пусть длина катушки равна *l*, радиус *R*, число витков *N*. Если по обмотке катушки протекает ток силой *I*, то энергия магнитного поля равна $W_M = \frac{LI^2}{2}$. Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R^2$. Индукция магнитного поля в катушке $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$, напряжённость магнитного поля $H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{N}{l} I$, объём пространства внутри соленоида $V = \pi R^2 l$. Поэтому

$$W_M = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R^2 I^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi R^2 l \cdot \mu\mu_0 \frac{N}{l} I \cdot \frac{N}{l} I = \frac{1}{2}\cdot V \cdot B \cdot H.$$



Т.к. поле внутри соленоида можно рассматривать как однородное, то объёмная плотность энергии $w=\dfrac{W}{V}$ магнитного поля определяется соотношением

$$w=\frac{BH}{2}=\frac{B^2}{2\mu\mu_0}=\frac{\mu\mu_0 H^2}{2}=\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{2}.$$

Взаимная индуктивность

Рассмотрим два контура (расположенных на не очень большом расстоянии друг от друга), по которым текут токи I_1 и I_2. Каждый из контуров создаёт в окружающем пространстве магнитное поле и, соответственно, магнитный поток через другой контур. По аналогии с коэффициентом самоиндукции можно записать:

магнитный поток, создаваемый во втором контуре током I_1, протекающим в первом контуре $\Phi_2=L_{21}I_1$;

магнитный поток, создаваемый в первом контуре током I_2, протекающим во втором контуре $\Phi_1=L_{12}I_2$.

Коэффициенты L_{12}, L_{21} называются *коэффициентами взаимной индукции* (или *взаимной индуктивностью*) контуров. Контуры при этом принято называть (магнитно) *связанными*.

В отсутствие ферромагнетиков выполняется равенство L_{12}=L_{21}. Очевидно, эти коэффициенты зависят от формы и относительно расположения контуров.

Энергия магнитного поля, создаваемого парой таких контуров с токами, определяется формулой $W=\iiint\limits_V wdV=\iiint\limits_V\dfrac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{2}dV$. Т.к. по принципу суперпозиции $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$ и $\vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2$, то

$$W=\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_1+\vec{B}_2,\vec{H}_1+\vec{H}_2\right)}{2}dV=\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_1,\vec{H}_1\right)}{2}dV+\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_2,\vec{H}_2\right)}{2}dV+\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_1,\vec{H}_2\right)}{2}dV+\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_2,\vec{H}_1\right)}{2}dV$$

Энергия магнитного поля, создаваемая каждым контуром в отдельности

$$W_1=\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_1,\vec{H}_1\right)}{2}dV=\frac{L_1I_1^2}{2},\ W_2=\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_2,\vec{H}_2\right)}{2}dV=\frac{L_2I_2^2}{2}.$$

Если в среде нет ферромагнетиков, то $\dfrac{\left(\vec{B}_1,\vec{H}_2\right)}{2}=\dfrac{\mu_0\mu\left(\vec{H}_1,\vec{H}_2\right)}{2}=\dfrac{\left(\vec{H}_1,\vec{B}_2\right)}{2}$, поэтому

$$\cdot\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_1,\vec{H}_2\right)}{2}dV=\frac{L_{12}I_1I_2}{2}=\frac{L_{21}I_1I_2}{2}=\iiint\limits_V\frac{\left(\vec{B}_2,\vec{H}_1\right)}{2}dV.$$

Тогда энергия взаимодействия двух контуров может быть записана в виде $W_{12}=L_{12}I_1I_2$.

Силы в магнитном поле.

Найдём силу взаимодействия F между витками (почти идеального) соленоида. Т.к. в каждом из витков токи текут в одинаковых направлениях, то витки взаимно притягиваются, поэтому силы взаимодействия стремятся сжать соленоид. Векторы этих сил направлены параллельно силовым линиям магнитного поля в соленоиде, поэтому их принято называть *натяжениями в магнитном поле*. Предположим, что при постоянной силе тока длина соленоида очень медленно *увеличится* на малую величину dl. Тогда работа внешних сил равна изменению энергии соленоида $\delta A_{ВНЕШ} = dW_M$. Но

$$\delta A_{ВНЕШ} = \sum_{i=1}^{N} F_{ВНЕШ} \delta x_i ,$$

где δx_i - перемещение каждого из витков. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N} \delta x_i = dl$. Очевидно, что внешняя сила, растягивающая соленоид, равна по величине силе взаимодействия между витками $F_{ВНЕШ} = F$, поэтому

$$\delta A_{ВНЕШ} = \sum_{i=1}^{N} F_{ВНЕШ} \delta x_i = F \sum_{i=1}^{N} \delta x_i$$

Изменение длины соленоида приведёт к изменению объёма магнитного поля внутри, следовательно, к изменению энергии $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S \cdot dl$. Здесь w – объёмная плотность энергии магнитного поля, S – площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда следует, что сила взаимодействия между витками (натяжения в магнитном поле) $F = wS$, а величина напряжения натяжения (вдоль силовых линий) равна $p_{\parallel} = \dfrac{F}{S} = w$ - объёмной плотности энергии магнитного поля.

Теперь найдём силу $F_{\perp}$ в направлении перпендикулярном силовым линиям магнитного поля внутри соленоида – эти силы «распирают» витки в радиальном направлении. Такие силы принято называть давлениями в магнитном поле. Предположим, что при постоянной силе тока радиус соленоида увеличился на малую величину dR. Объём соленоида увеличится – поэтому увеличится и энергия магнитного поля $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S_{ВНУТР} \cdot dR$. Здесь w – объёмная плотность энергии магнитного поля, $S_{ВНУТР}$ – площадь внутренней поверхности соленоида. Так как работа силы $F_{\perp}$ равна $\delta A = F_{\perp} dR$, то $F_{\perp} = w \cdot S_{ВНУТР}$, соответственно, напряжение давления равно $p_{\perp} = \dfrac{F_{\perp}}{S_{ВНУТР}} = w$ - объёмной плотности энергии магнитного поля.

Определение. Силы, действующие на тела со стороны магнитного (или электрического) поля, называют *пондемоторными*.